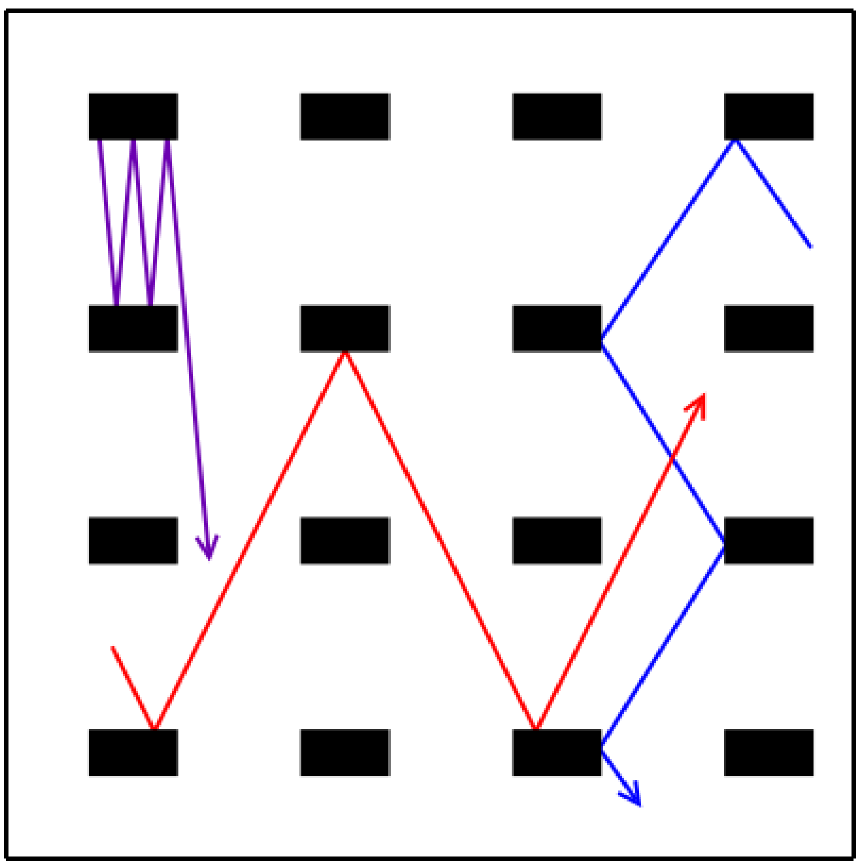
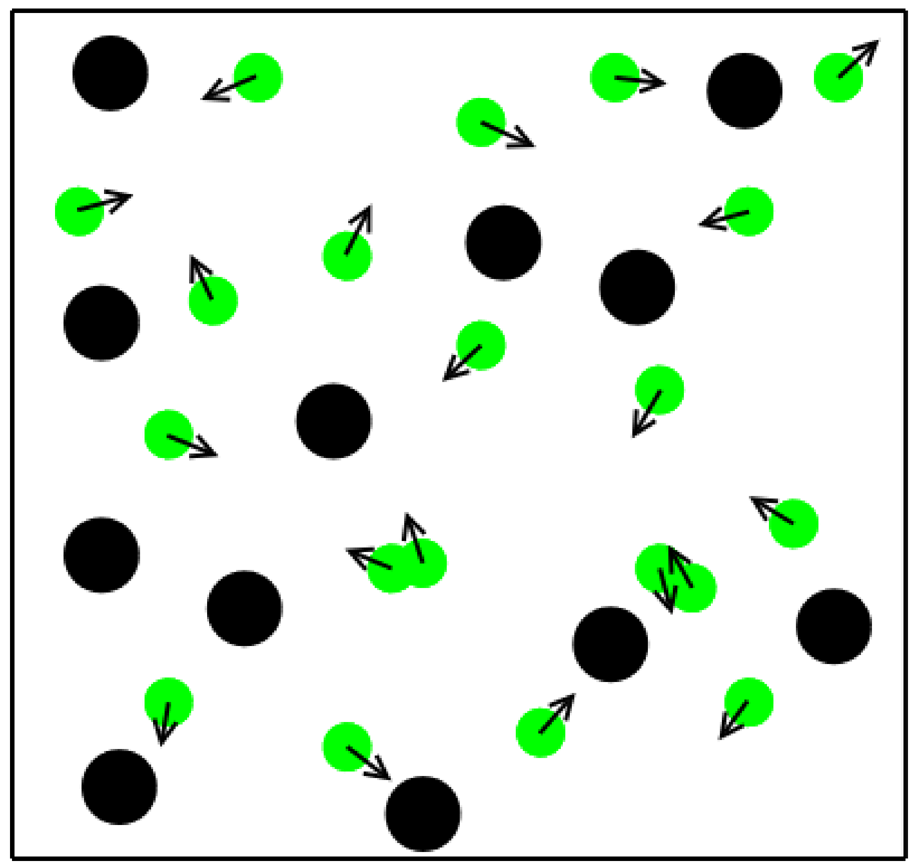
# Approche macroscopique de la diffusion dans le modèle des miroirs

Yann Chiffaudel
Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires
Sous la direction de Raphaël Lefevere
Publié dans JphysA

# Gaz de Lorentz

- Particules sans interactions
- Obstacles fixes





# La diffusion des Particules

3 définitions :

1) Chaque particule respecte : $\mathbb{E}(r^2) \sim 4Dt$

2) Chaque particule suit un mouvement Brownien

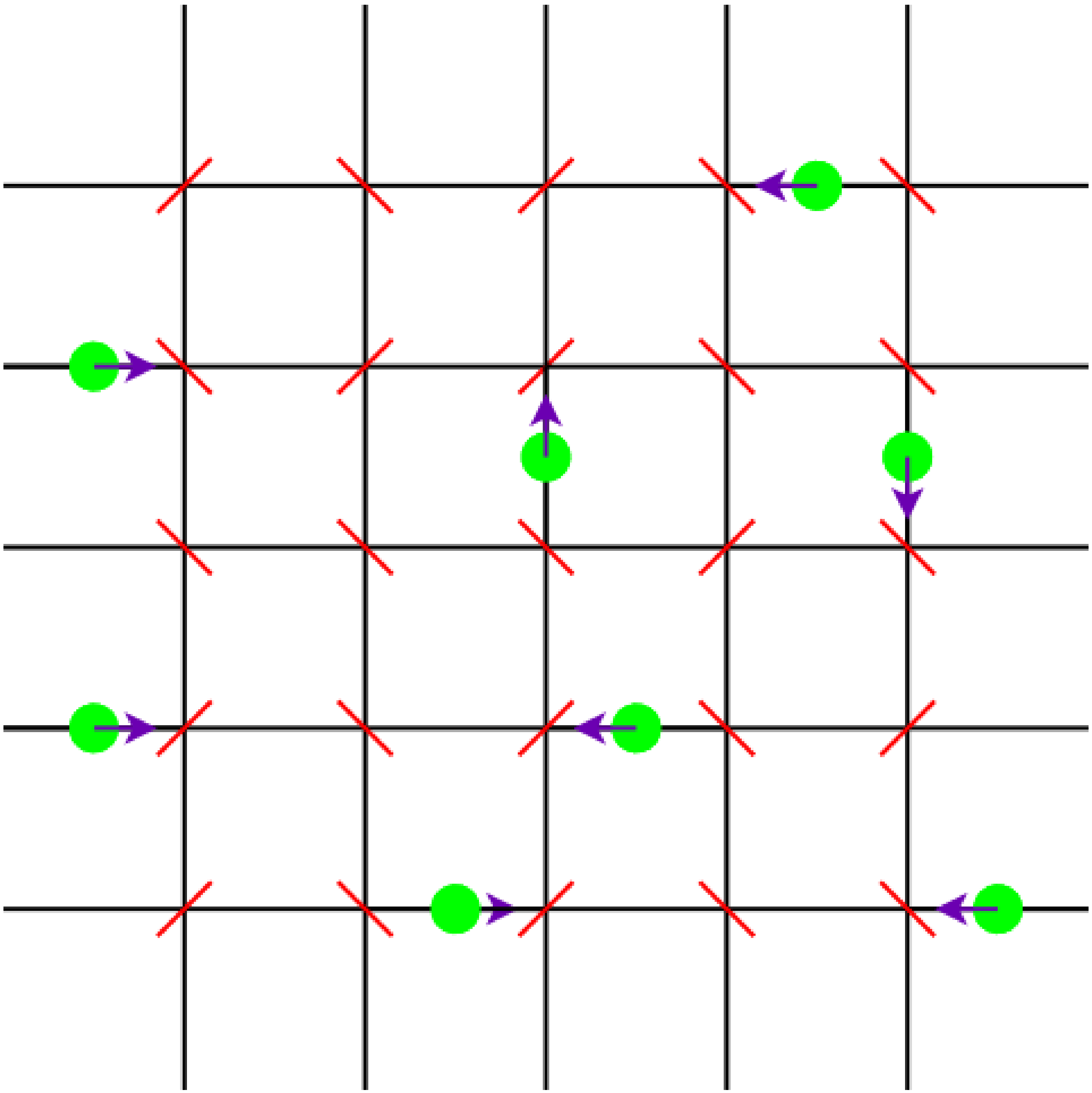
3) L'ensemble des particules respecte la loi de Fick :

$$\boxed{\vec{j} = -\kappa \vec{\nabla} \rho}$$

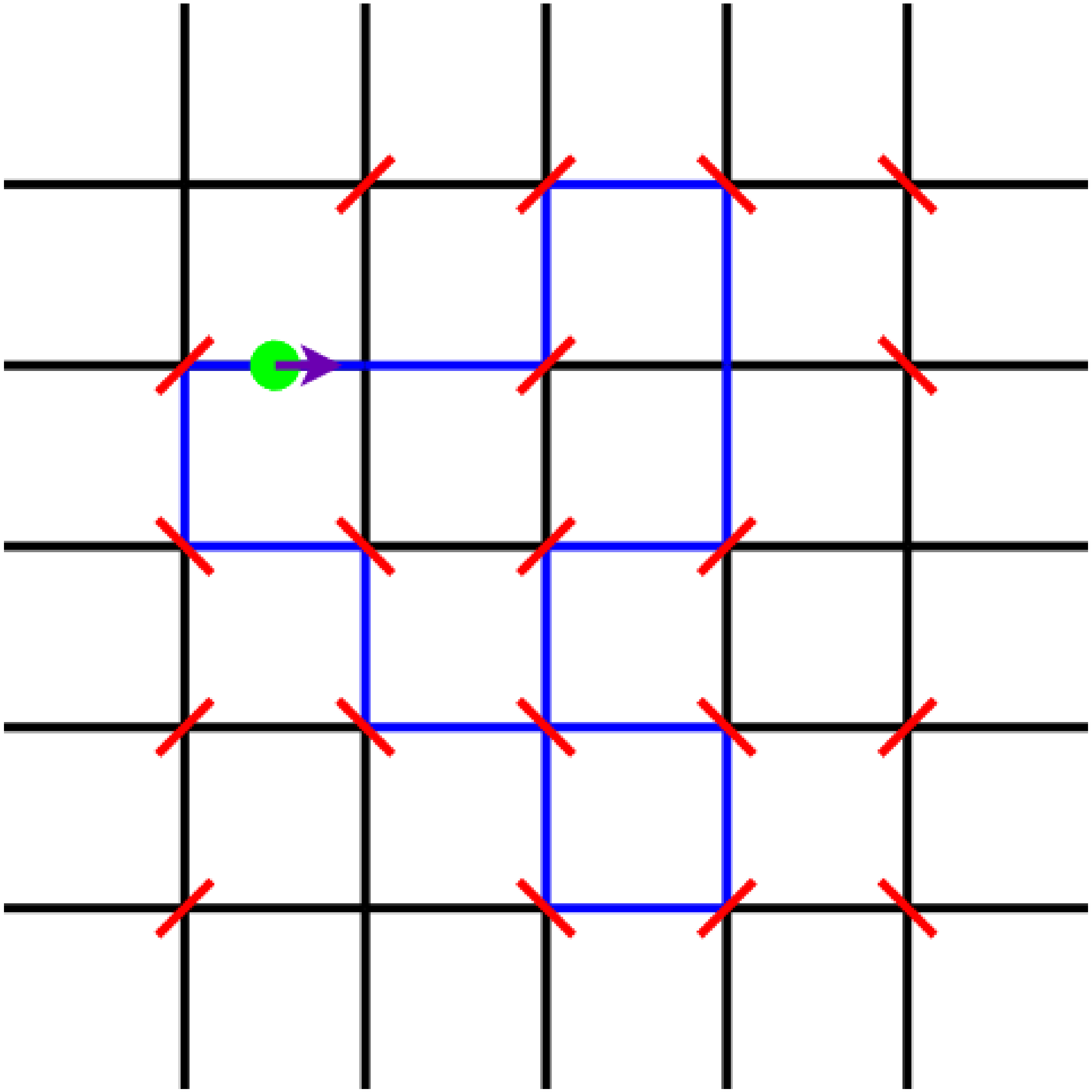
On peut montrer que 2) $\Rightarrow$ 1) et que 2) $\Rightarrow$ 3)

Mais montrer 2) est difficile !

# Le modèle des miroirs 2D

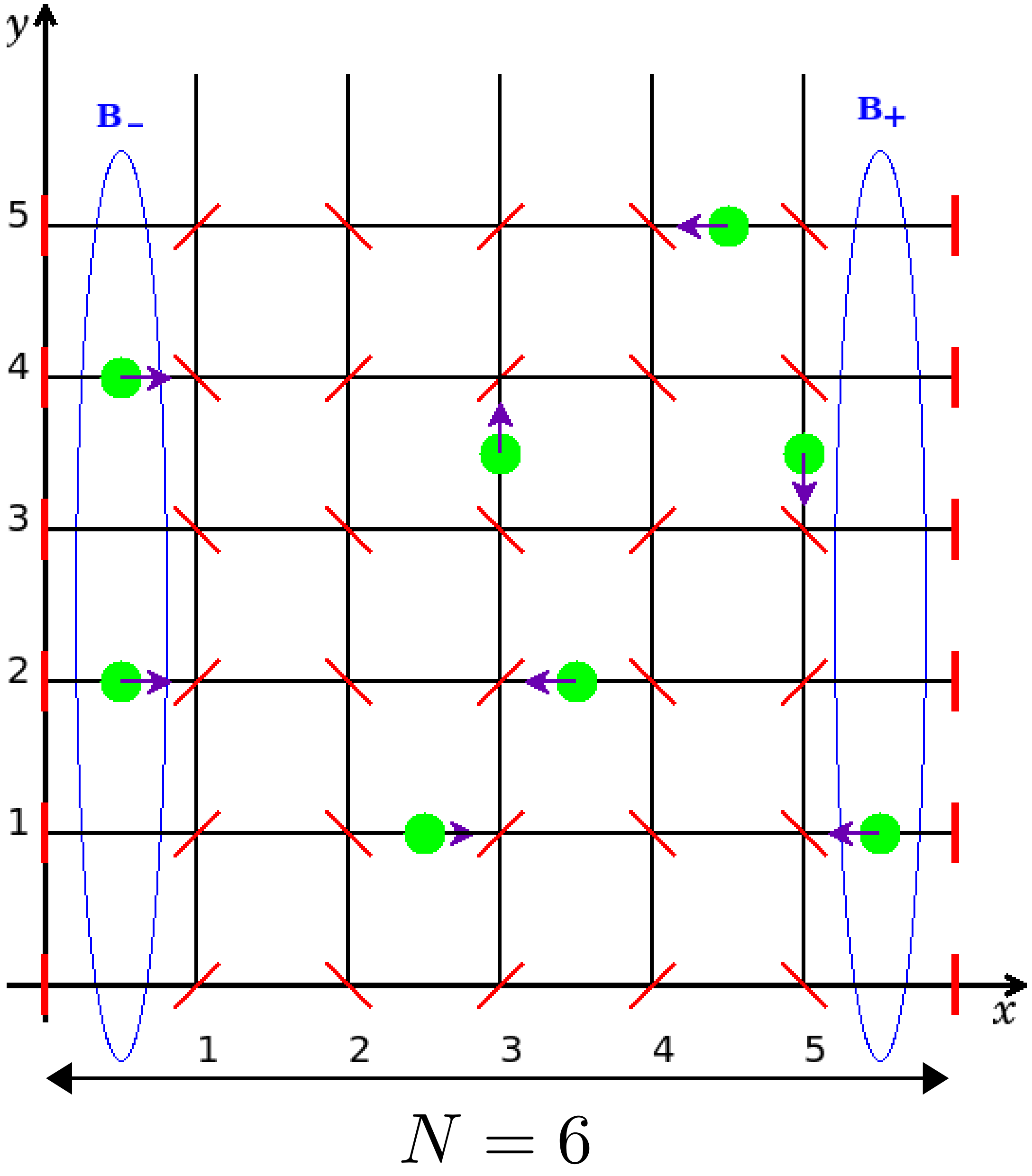


# Boucles auto-évitantes

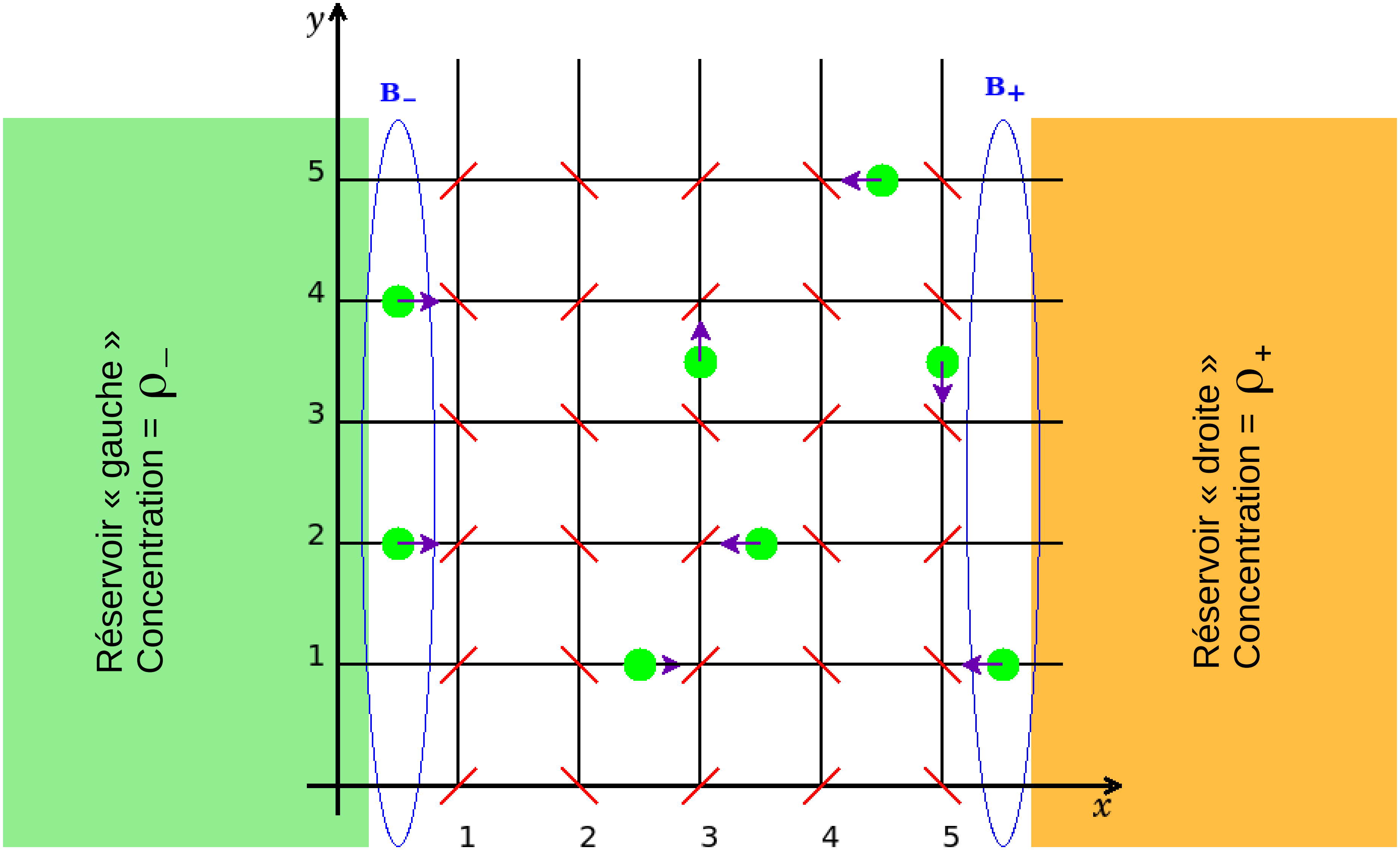


Les particules ne suivent pas un mouvement Brownien !

# Le modèle des miroirs dans un tube

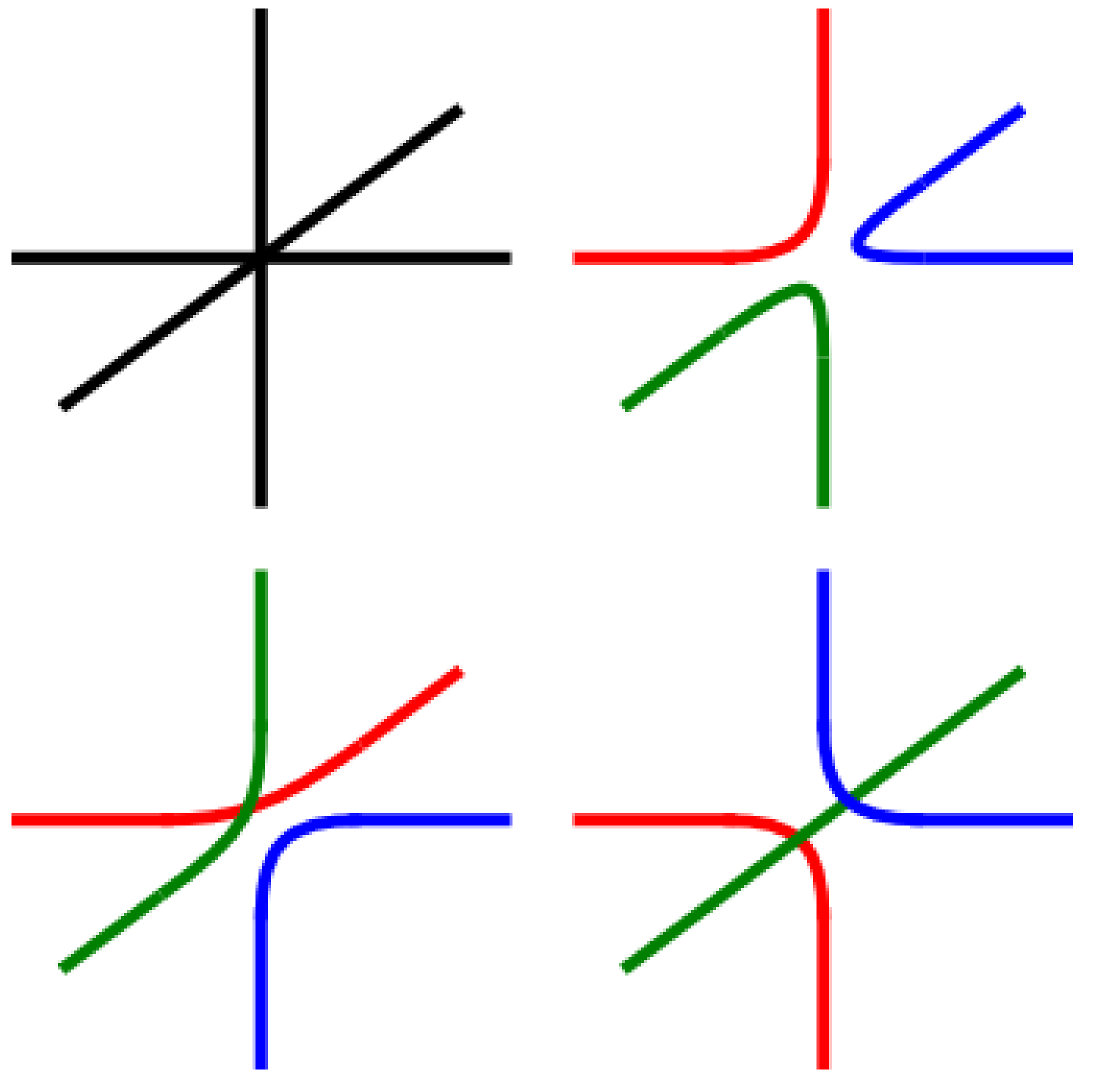


# Le modèle des miroirs dans un tube

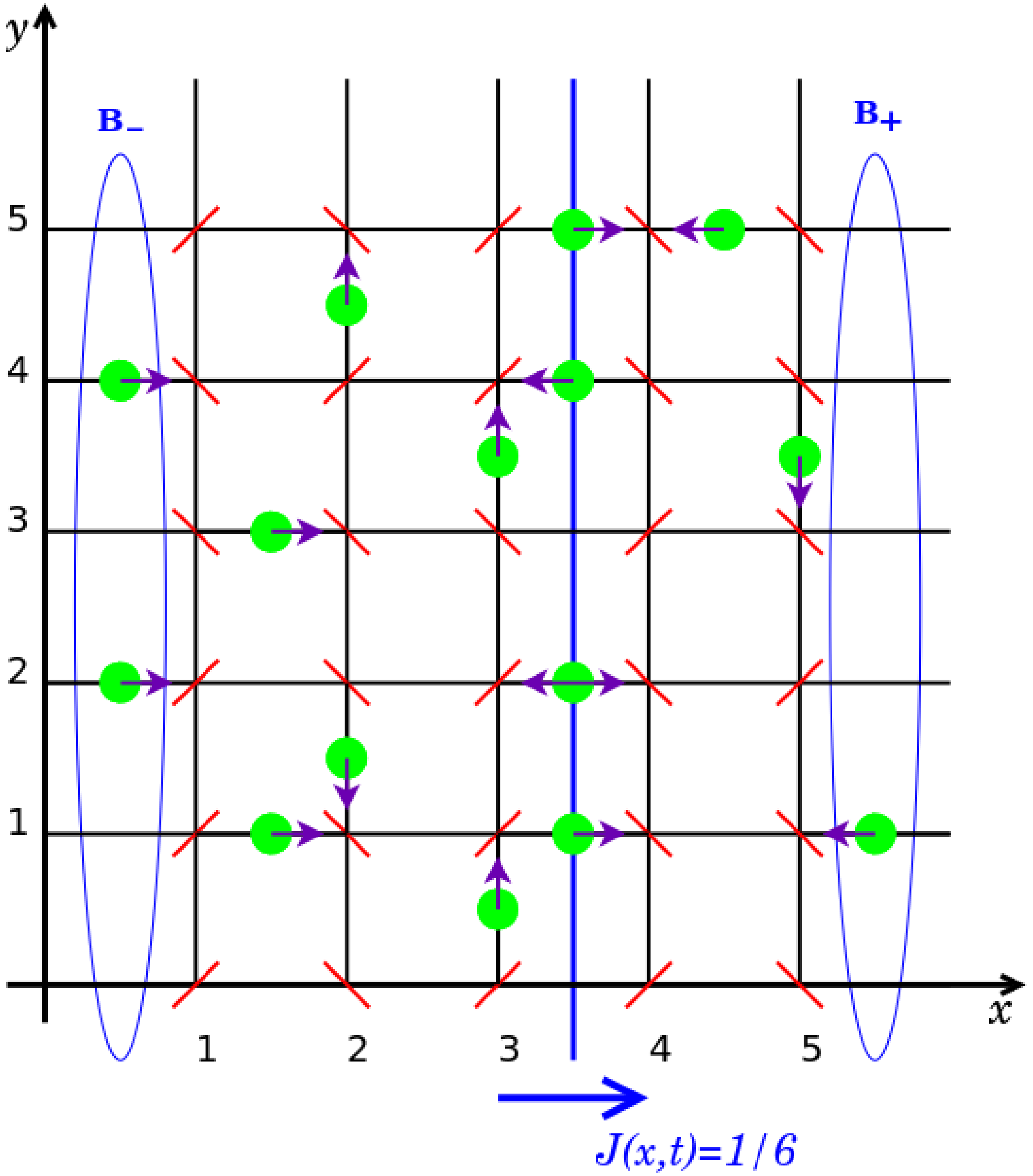



On fait rentrer les particules suivant des lois de Bernoulli

# « Miroirs » en 3D



# Courant



# Loi de Fick

Coefficient de diffusion

Concentrations dans les réservoirs de particules

$$J \sim \frac{\kappa(\rho_- - \rho_+)}{N}$$

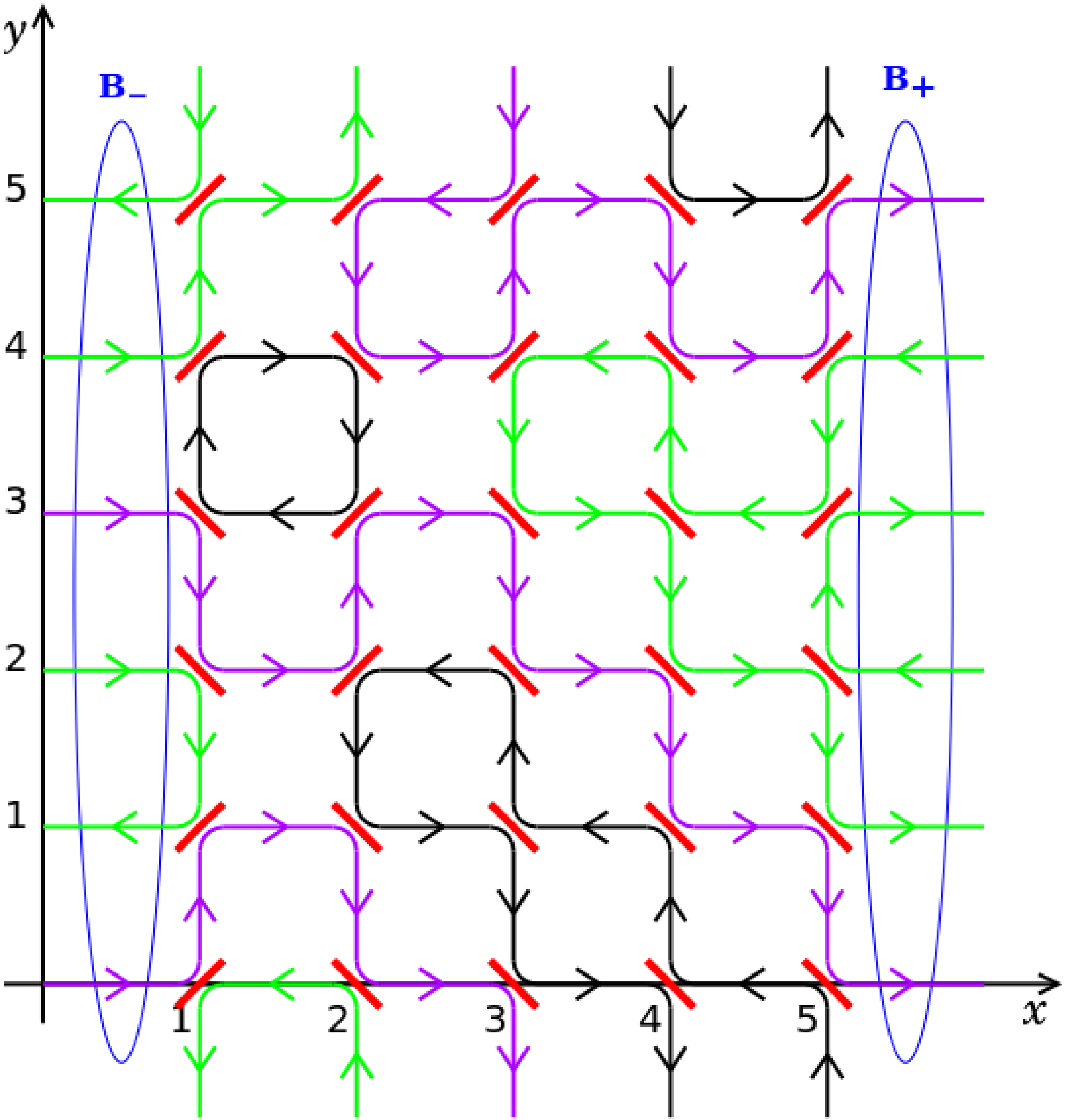
Courant

Taille du système

$$\exists \kappa \in \mathbb{R}_+^*, \forall \epsilon > 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{t\to\infty} \mathbb{P} \times \mathbb{Q}[|NJ(x,t) - \kappa(\rho_- - \rho_+)| > \epsilon] = 0$$

# Orbites traversantes



# Reformulation de la loi de Fick

- Forme épurée de la loi de Fick :

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{Q}\left(\left|\frac{\mathcal{N}}{N^{d-2}} - \kappa\right| > \epsilon\right) = 0$$

$$d = \text{ dimension du système}$$

$$\mathcal{N} = \text{Nombre d'orbites traversantes}$$

- Conditions suffisantes :

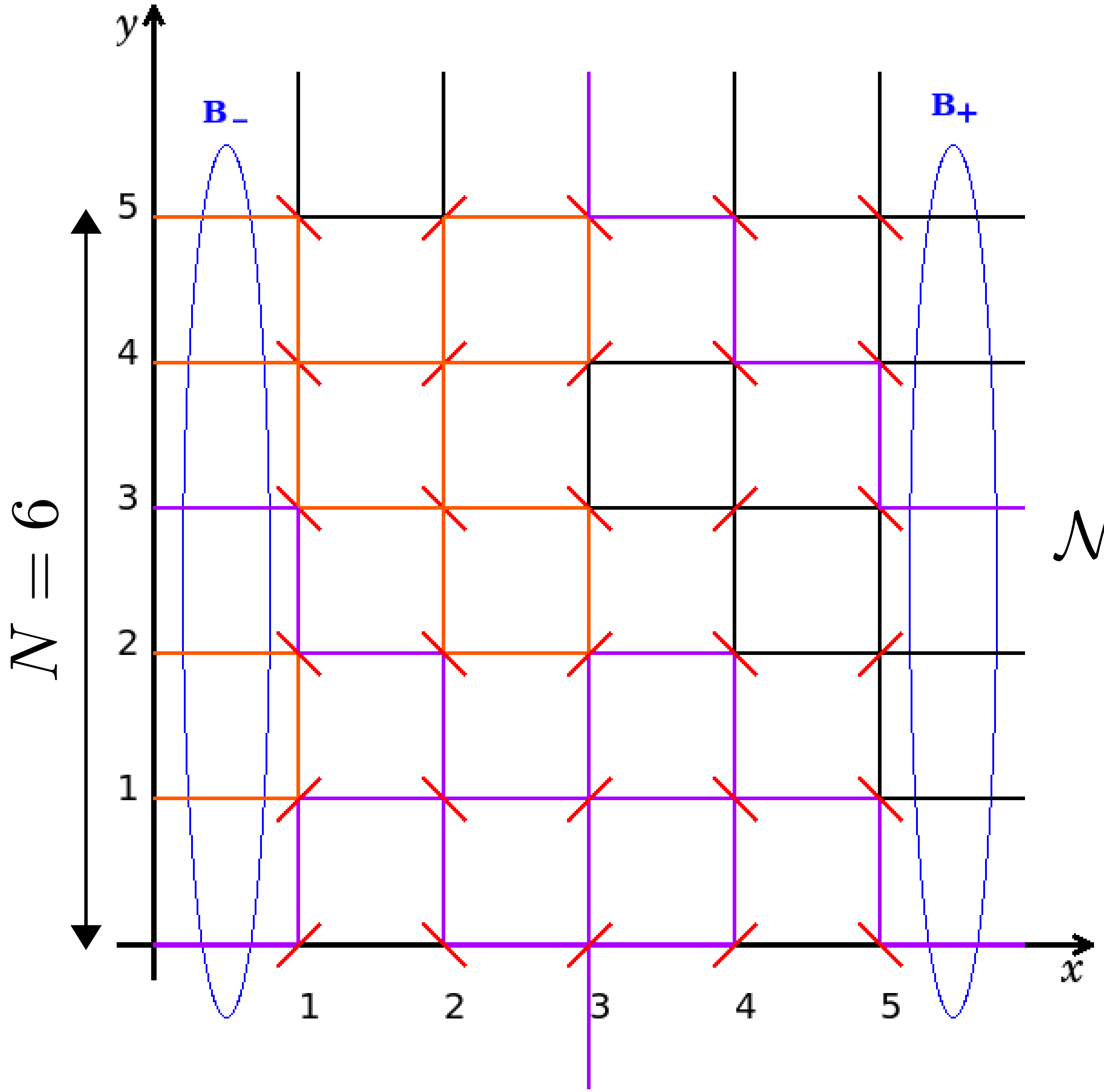
« Origine »

Ensemble des extrémités des orbites traversantes

$$1) \lim_{N\to\infty} N \times \mathbb{Q}(O \in S) = \kappa$$

$$2) \text{ Correlations Faibles}$$

# Parité de $\mathcal{N}$

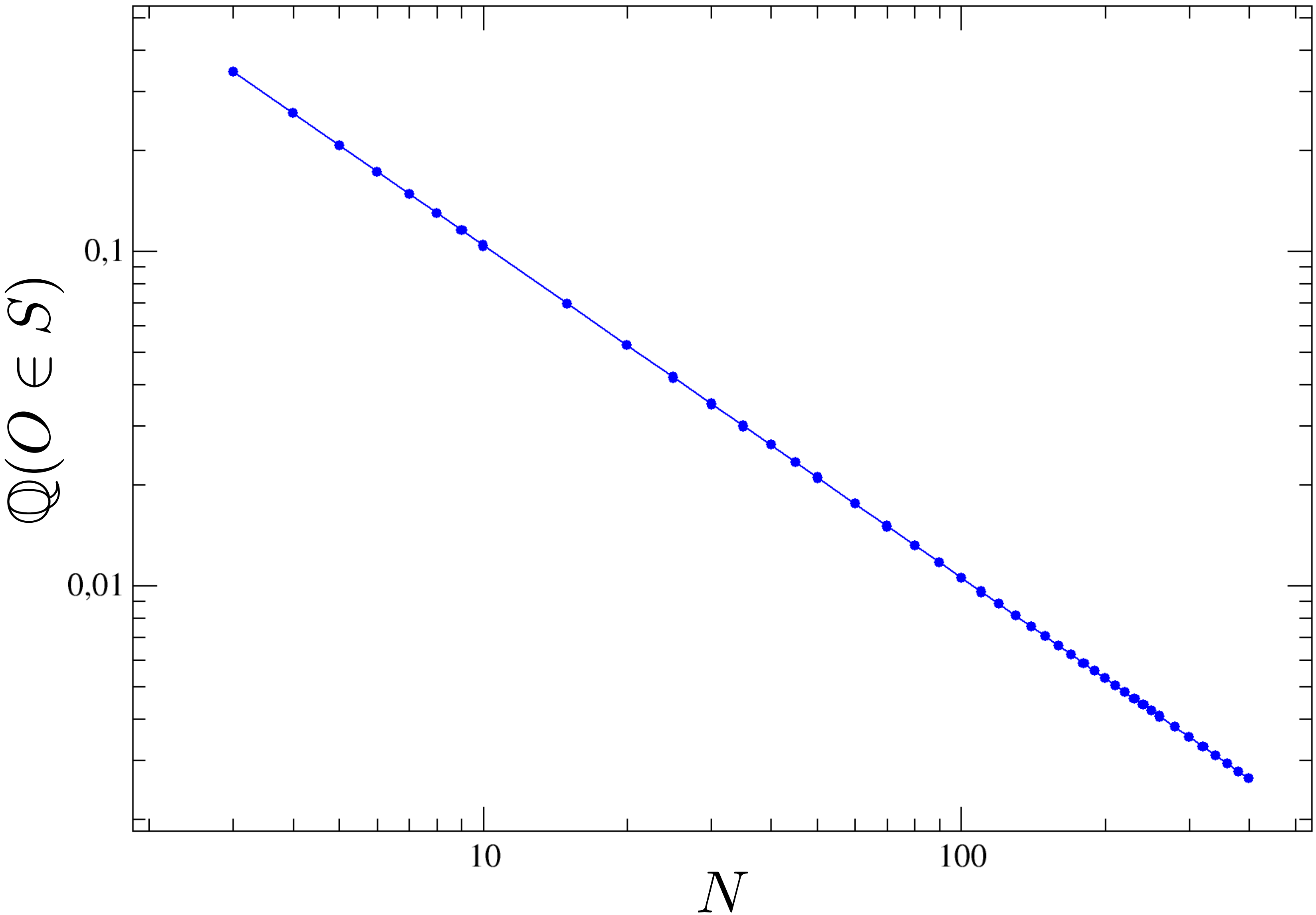



$\mathcal{N}$ et $N$ ont la même parité

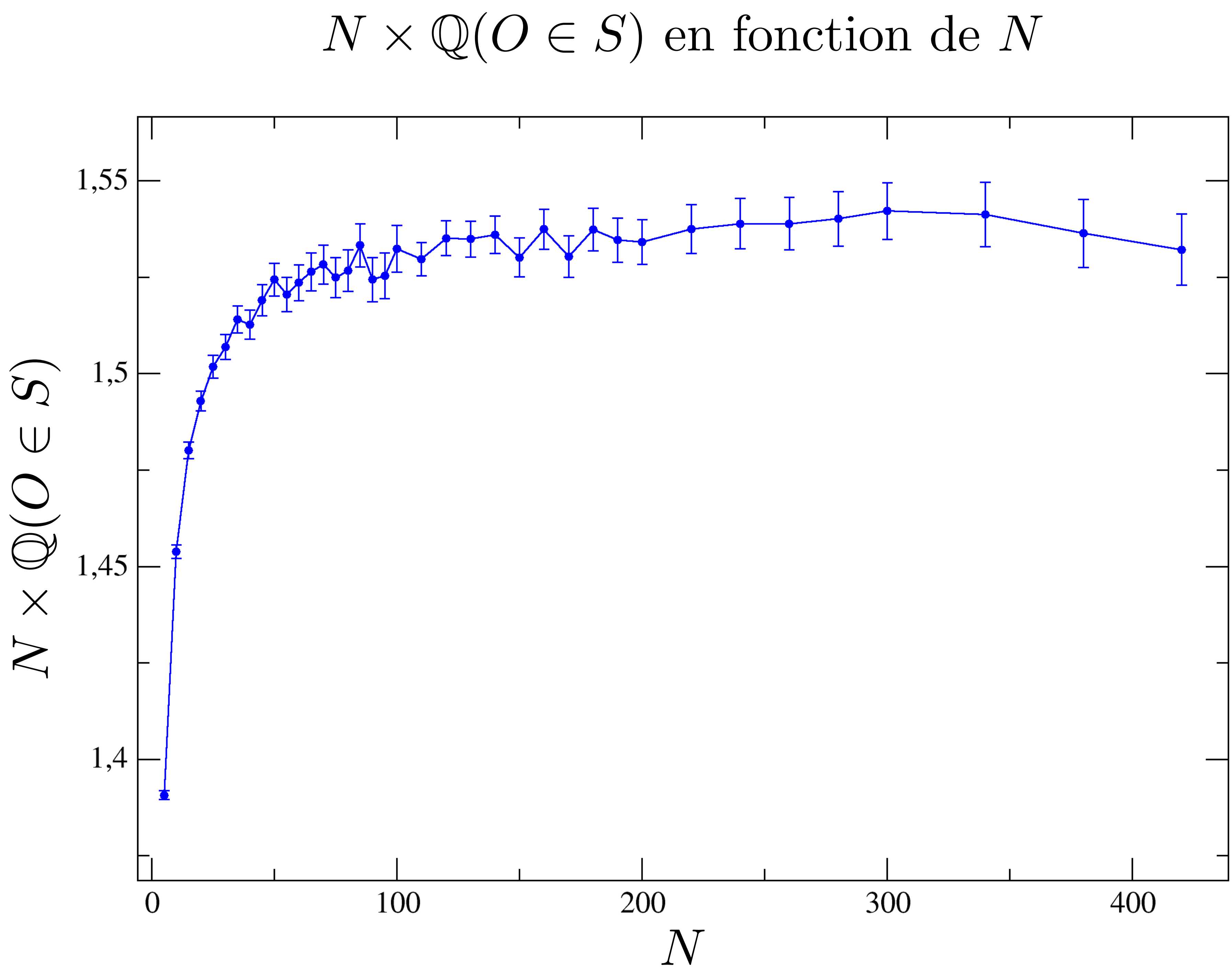
La loi de Fick n'est donc pas respectée en 2D.

# Simulations en 3D

$\mathbb{Q}(O \in S)$ en fonction de $N$




Conjecture : $\mathbb{Q}(O \in S) \sim \dfrac{\kappa}{N}$ avec $\kappa \simeq 1.535$


$N \times \mathbb{Q}(O \in S)$ en fonction de $N$
$N \times \mathbb{Q}(O \in S)$
1,55
1,5
1,45
1,4
0
100
200
300
400
$N$

# Corrélations

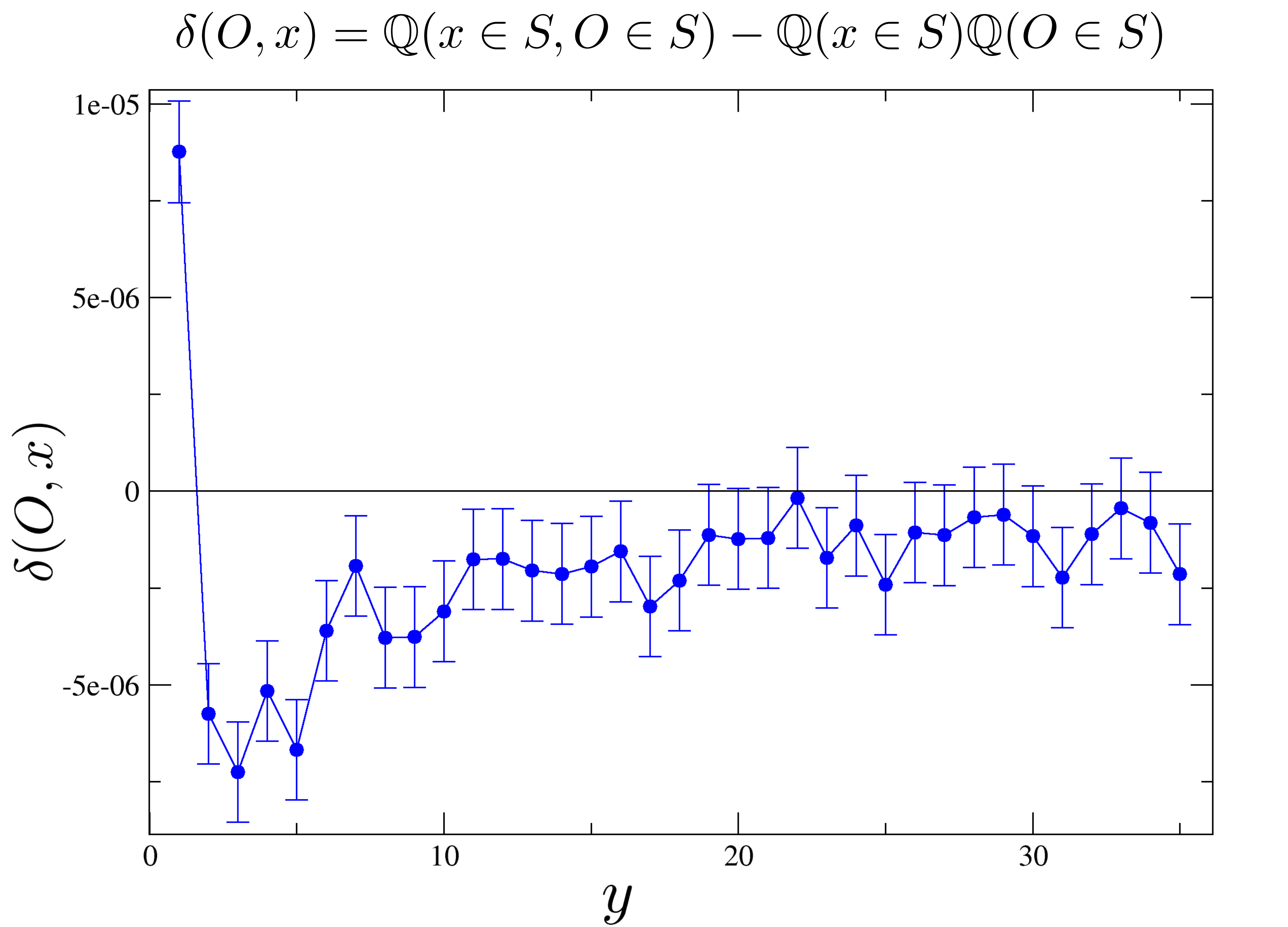
Objectif, montrer que :

$$\mathrm{Var}(\frac{\mathcal{N}}{N}) = \sum_{x \in D_-} \delta(O,x) \underset{N \to +\infty}{\to} 0$$

Ensemble des « points de départ » des orbites

Avec :

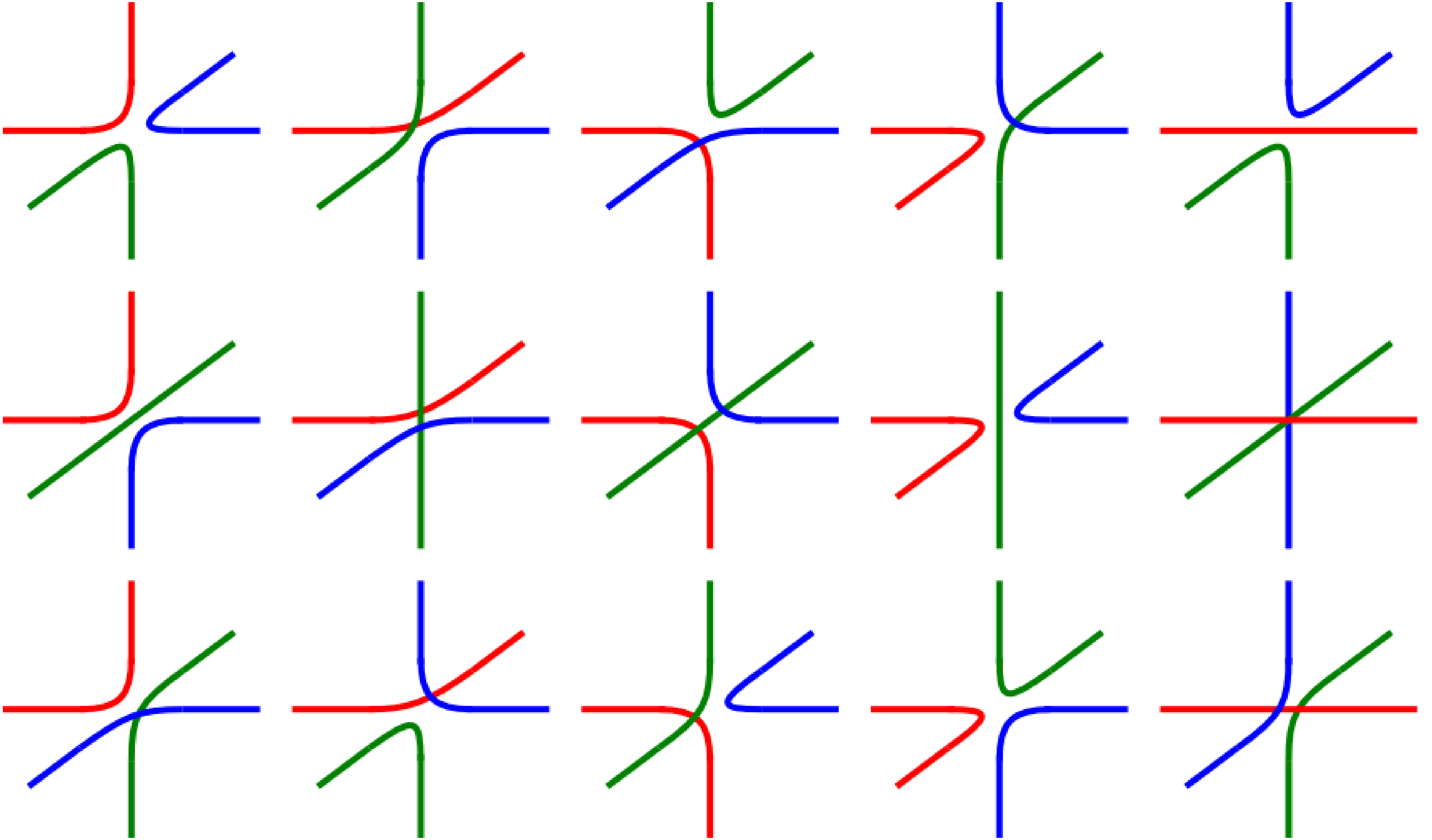
$$\delta(O,x) := \mathbb{Q}(x \in S, O \in S) - \mathbb{Q}(x \in S)\mathbb{Q}(O \in S)$$


$\delta(O,x) = \mathbb{Q}(x \in S, O \in S) - \mathbb{Q}(x \in S)\mathbb{Q}(O \in S)$
1e-05
5e-06
0
-5e-06
$\delta(O,x)$
0
10
20
30
$y$

# Conclusion

- Modèle bien défini en dimension quelconque
- Pas de loi de Fick en 2D
- Conjecture obtenue en 3D
- Preuve en cours
- Article disponible dans JphysA et sur Arxiv.

# « Miroirs » en 3D



$$\vec{j} = -\kappa \vec{\nabla} \rho$$

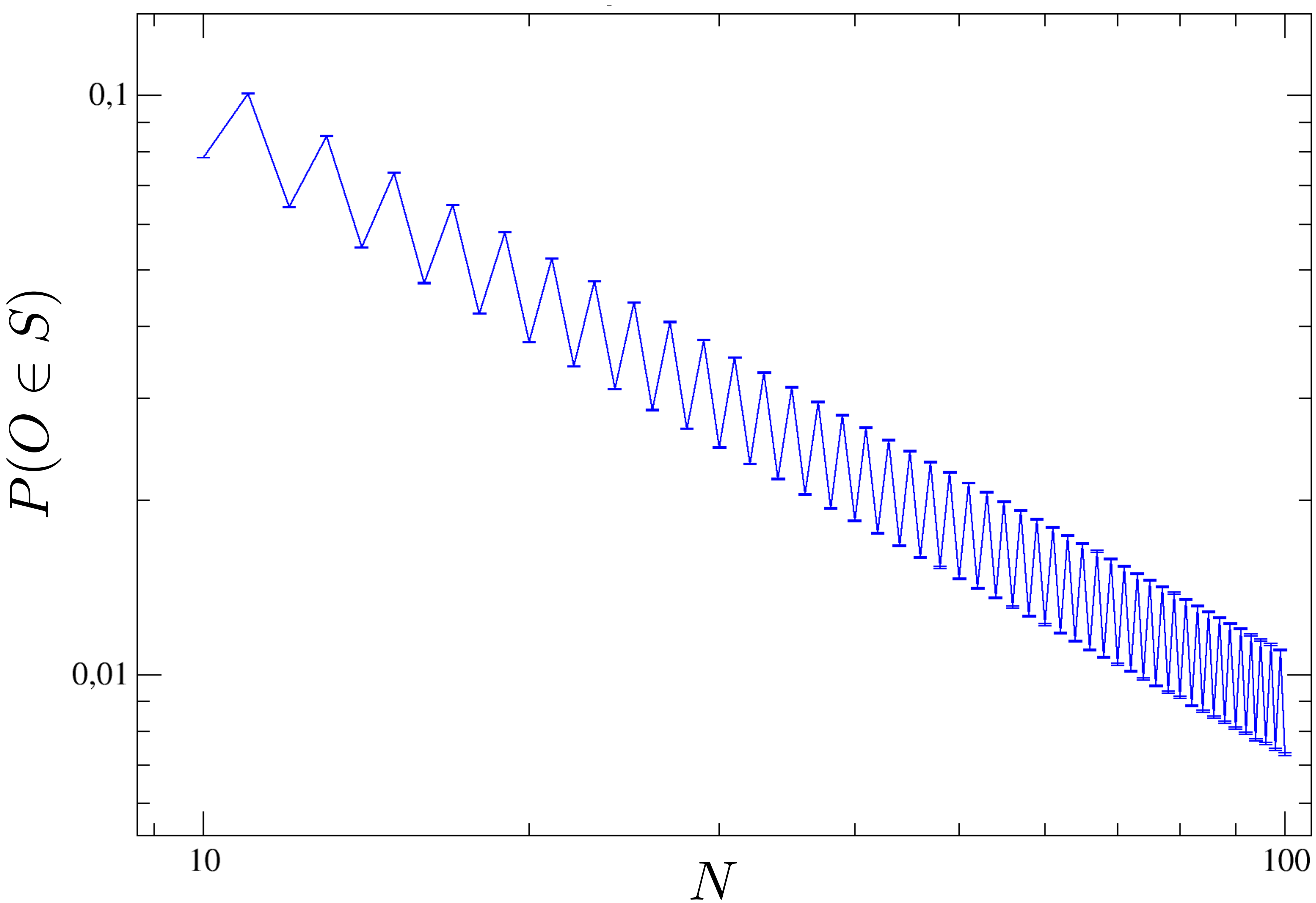
À l'équilibre : $\vec{\nabla}.\vec{j} = -\kappa \vec{\nabla}^2 \rho = 0$

Donc, la densité varie linéairement entre les 2 extrémités du système.

Donc, $\vec{j} = -\kappa \vec{\nabla} \rho = \dfrac{\kappa(\rho_- - \rho_+)}{N}$

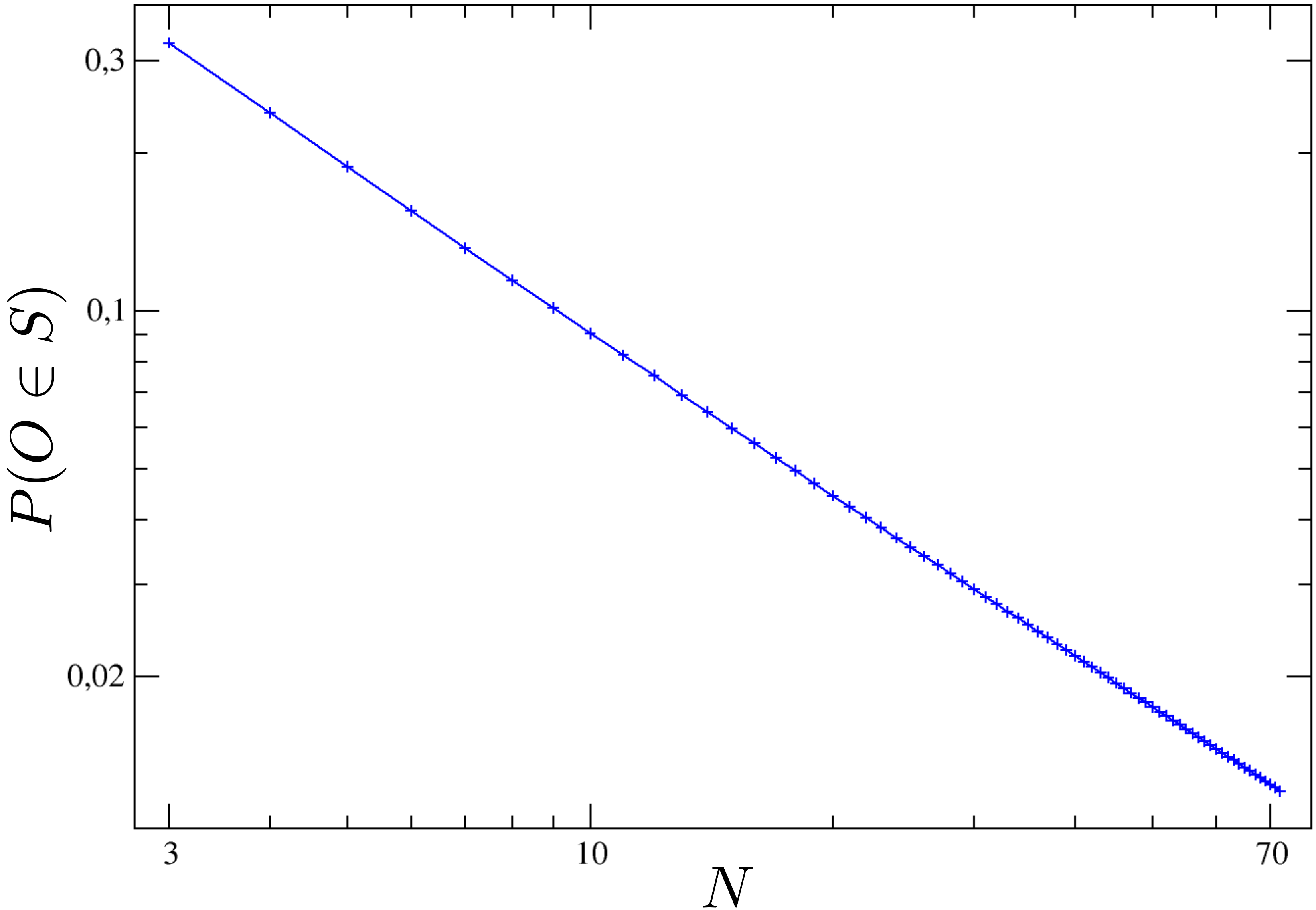
# Simulations en 2D

# Probabilité de traverser en fonction de N



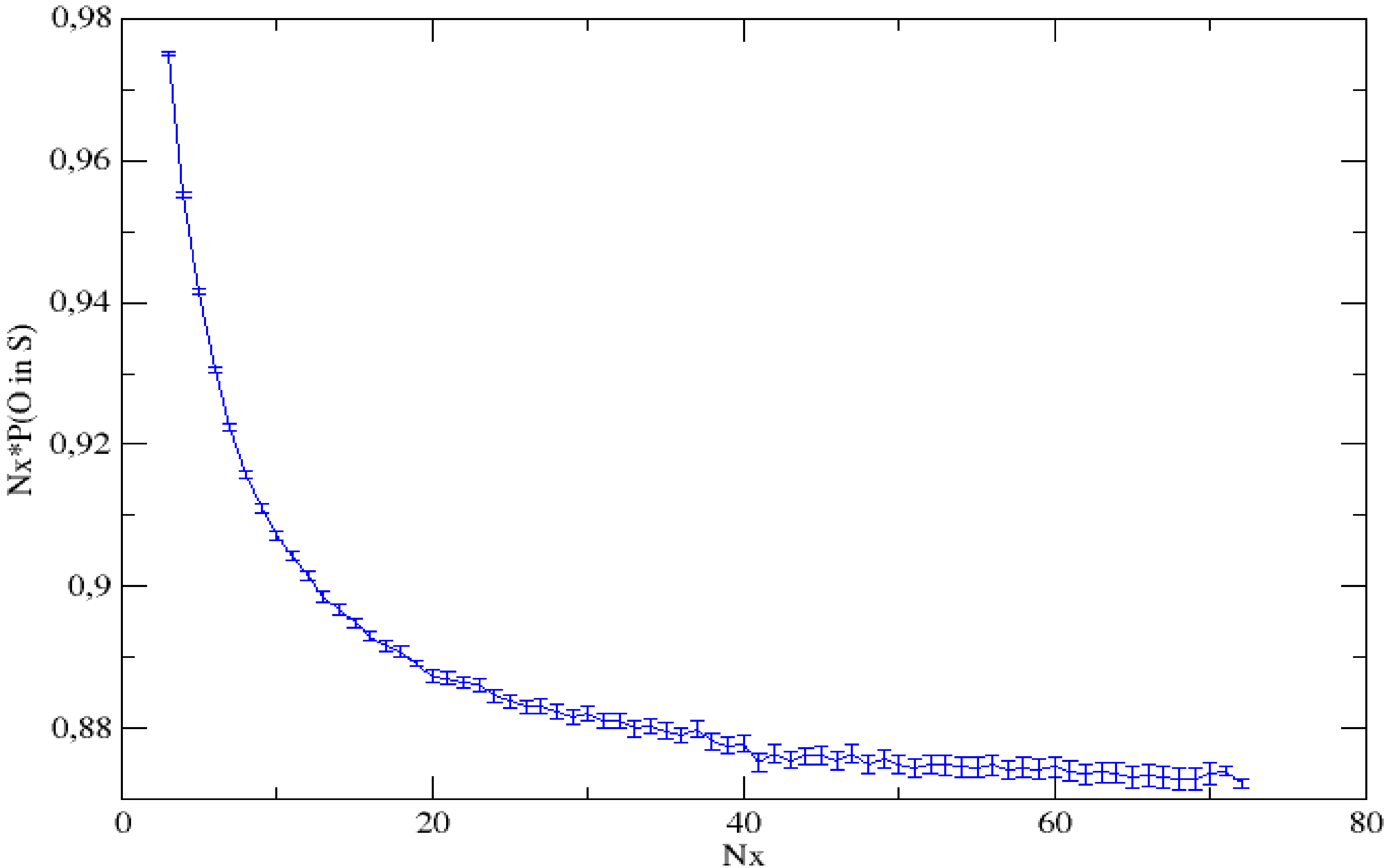
# Probabilité de traverser en fonction de N

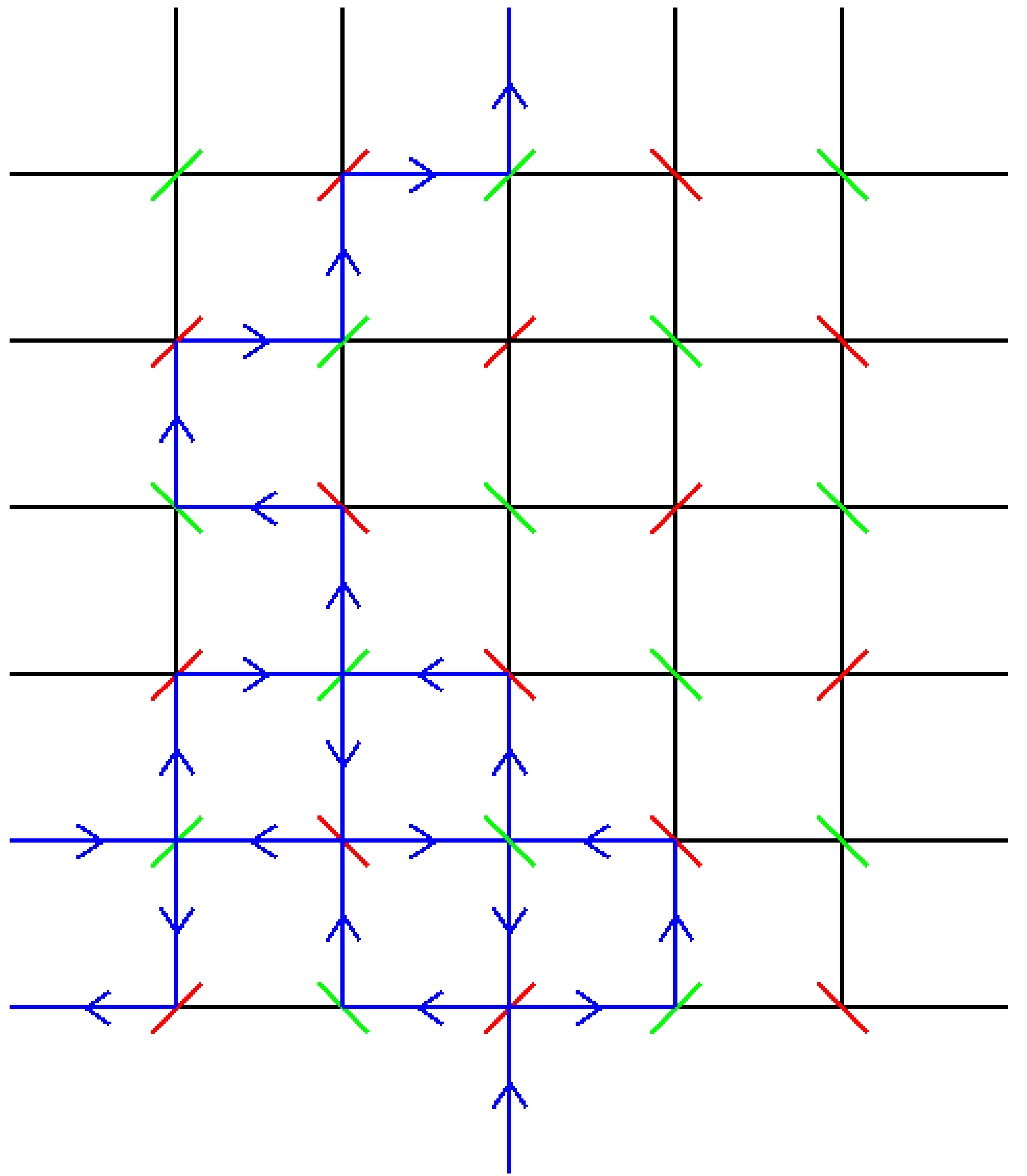
$N_y = +\infty$

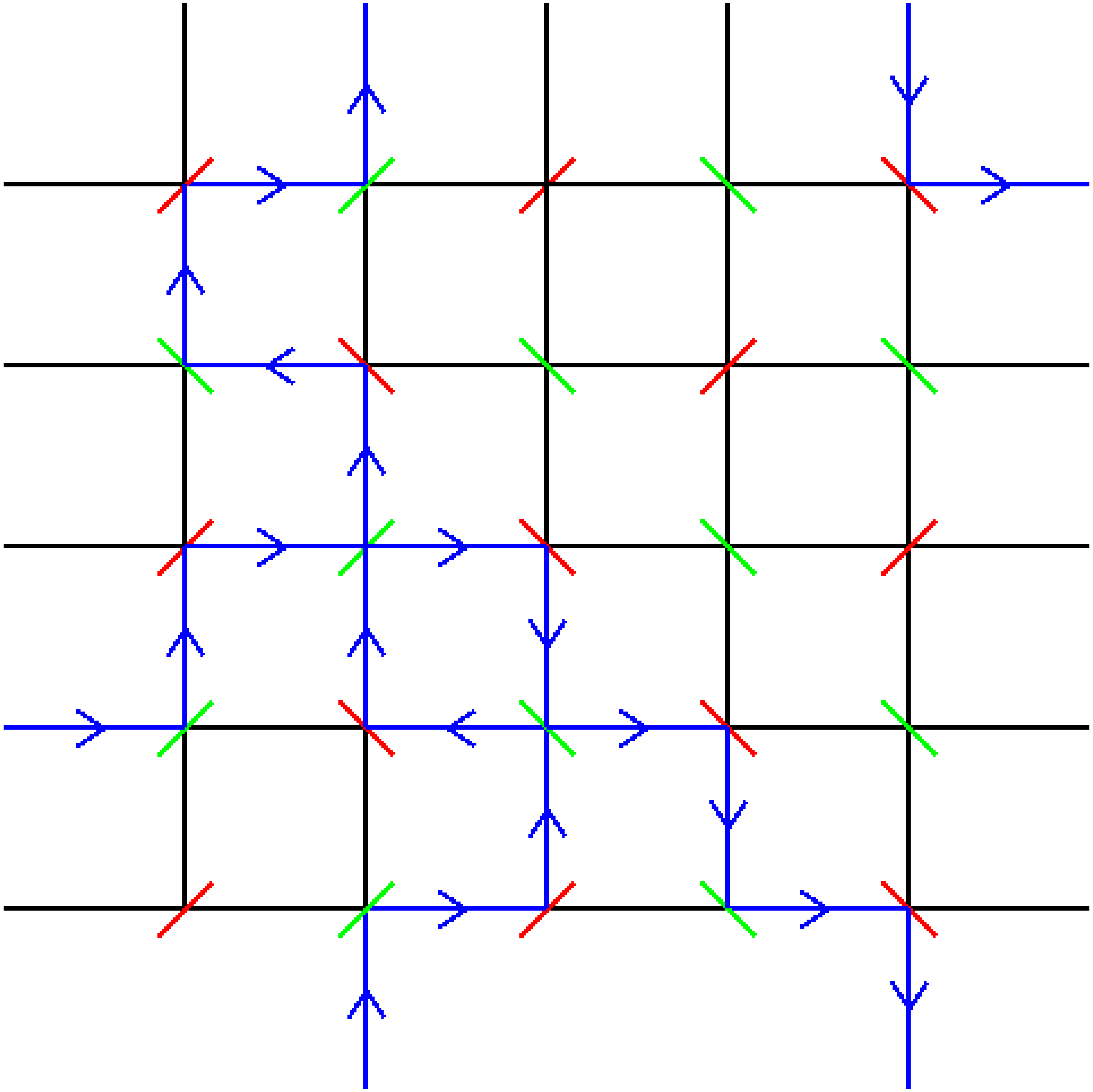


# N*Probabilité de traverser en fonction de N

$$N_y = +\infty$$







$$\mathcal{N}$$

$$\sum_{x \in D_-} P\left(x \in S, O \in S\right) - P\left(O \in S\right)^2 \rightarrow 0$$

$$2) \lim_{N \to \infty} \frac{P(O \in S)}{N^{d-3}} \sum_{x \in D_-} \left(P(x \in S | O \in S) - P(O \in S)\right) = 0$$

# Dimension d quelconque

$\mathcal{Q} =$ ensemble des milieux des arrtes de $[0, N]^d$

$\mathcal{P} = \left\{ \pm \frac{e_i}{2} | i \in [1, d] \right\}$

$\mathcal{M} \subset \mathcal{Q} \times \mathcal{P}$ est l'espace des phases