Trou spectral de matrices de Markov sur des graphes

Simon Coste

Expanseurs, trou spectral, graphes de Ramanujan, marches aléatoires

Quelques définitions

Soit $G = (V, E)$ un graphe avec n sommets.

- A = matrice d'adjacence du graphe G, définie par

$$A(i, j) = \mathbf{1}_{i \sim j}$$

- Si G est non orienté, A est symétrique.
- Valeurs propres de A :

$$\lambda_1 \geqslant ... \geqslant \lambda_n.$$

Le problème : trouver des graphes G très bien connectés avec aussi peu d'arrêtes que possible.

Expansion et expanseurs

Le problème : trouver des graphes G très bien connectés avec aussi peu d'arrêtes que possible.

Soient $X, Y \subset V$.

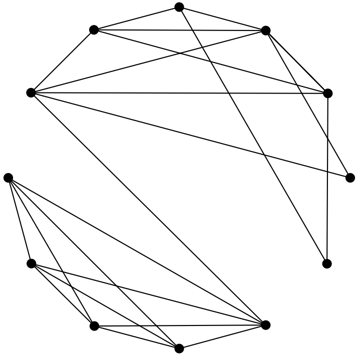
- $E(X,Y) = \{\text{arêtes } (i,j) \in E \text{ avec } i \in X, j \in Y\}$
- $\partial X = E(X, V \setminus X)$.

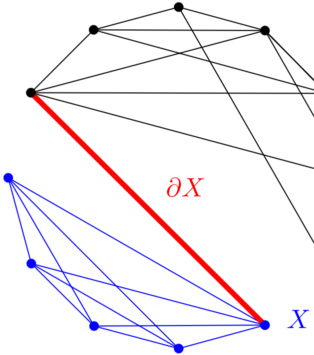
Définition

Constante isopérimétrique d'un graphe G :

$$h(G) = \inf_{|F| \leqslant \lfloor n/2 \rfloor} \frac{|\partial F|}{|F|}.$$

- $h(G)$ grande : le graphe est « bien étendu ».
- $h(G)$ petite : il y a des goulots d'étranglement.





∂X
X

Dorénavant, tous les graphes considérés seront d-réguliers.

Dorénavant, tous les graphes considérés seront d-réguliers.

Définition

Une famille de graphes d-réguliers $(G_n)_n$ est une famille d'expanseurs si :

- *le nombre de sommets de G_n croît vers ∞ avec n,*
- *il existe une constante $c > 0$ telle que $h(G_n) > c$ pour tout n.*

Lien entre spectre et expansion

Théorème (Inégalités de Cheeger)

Si G est un (n, d)-graphe,

$$\frac{d - \lambda_2}{2} \leqslant h(G) \leqslant \sqrt{d(d - \lambda_2)}. \tag{1}$$

- $d - \lambda_2$ grand : le graphe est un bon expanseur.
- $d - \lambda_2$ petit : le graphe n'est pas un bon expanseur.

Conlusion :

Les propriétés d'expansion d'un graphe régulier sont reliées à son spectre via λ_2 ou encore via $\lambda_\star = |\lambda_2| \vee |\lambda_n| = \max\{|\lambda_i| : i \neq 1\}$.

A-t-on de bonnes bornes sur $\lambda_\star$?

Conlusion :

Les propriétés d'expansion d'un graphe régulier sont reliées à son spectre via λ_2 ou encore via $\lambda_\star = |\lambda_2| \vee |\lambda_n| = \max\{|\lambda_i| : i \neq 1\}$.

A-t-on de bonnes bornes sur $\lambda_\star$?

Théorème (Alon-Boppana 1991)

Pour tout (n, d)-graphe connexe, on a

$$\lambda_\star \geqslant 2\sqrt{d-1} - o_n(1). \tag{2}$$

Un graphe d-régulier tel que

$$\lambda_\star(G) \leqslant 2\sqrt{d-1}$$

est appelé *graphe de Ramanujan.*
Il est extrêmement difficile de construire des graphes de Ramanujan !

Cadre probabiliste

$\mathscr{G}_{n,d}$ = ensemble des (n,d)-graphes.
G_n = variable aléatoire uniformément distribuée sur $\mathscr{G}_{n,d}$.
$\lambda_i = \lambda_i(G_n), \lambda_\star = \lambda_\star(G_n)$

Théorème (Alon,Friedman)

Pour $\epsilon > 0$ fixé, lorsque $n \to \infty$ on a

$$\mathbf{P}(\lambda_\star > 2\sqrt{d-1} + \epsilon) \to 0.$$

Cadre probabiliste

$\mathscr{G}_{n,d}$ = ensemble des (n,d)-graphes.
G_n = variable aléatoire uniformément distribuée sur $\mathscr{G}_{n,d}$.
$\lambda_i = \lambda_i(G_n), \lambda_\star = \lambda_\star(G_n)$

Théorème (Alon,Friedman)

Pour $\epsilon > 0$ fixé, lorsque $n \to \infty$ on a

$$\mathbf{P}(\lambda_\star > 2\sqrt{d-1} + \epsilon) \to 0.$$

- Conjecturé en 1986 par Noga Alon.

Cadre probabiliste

$\mathscr{G}_{n,d}$ = ensemble des (n, d)-graphes.
G_n = variable aléatoire uniformément distribuée sur $\mathscr{G}_{n,d}$.
$\lambda_i = \lambda_i(G_n), \lambda_\star = \lambda_\star(G_n)$

Théorème (Alon,Friedman)

Pour $\epsilon > 0$ fixé, lorsque $n \to \infty$ on a

$$\mathbf{P}(\lambda_\star > 2\sqrt{d-1} + \epsilon) \to 0.$$

- Conjecturé en 1986 par Noga Alon.
- Première démonstration (118 pages !) par Friedman en 2005.

Cadre probabiliste

$\mathscr{G}_{n,d}$ = ensemble des (n,d)-graphes.
G_n = variable aléatoire uniformément distribuée sur $\mathscr{G}_{n,d}$.
$\lambda_i = \lambda_i(G_n), \lambda_\star = \lambda_\star(G_n)$

Théorème (Alon,Friedman)

Pour $\epsilon > 0$ fixé, lorsque $n \to \infty$ on a

$$\mathbf{P}(\lambda_\star > 2\sqrt{d-1} + \epsilon) \to 0.$$

- Conjecturé en 1986 par Noga Alon.
- Première démonstration (118 pages !) par Friedman en 2005.
- Deuxième démonstration par Bordenave en 2015.

Cadre probabiliste

$\mathscr{G}_{n,d}$ = ensemble des (n, d)-graphes.
G_n = variable aléatoire uniformément distribuée sur $\mathscr{G}_{n,d}$.
$\lambda_i = \lambda_i(G_n), \lambda_\star = \lambda_\star(G_n)$

Théorème (Alon,Friedman)

Pour $\epsilon > 0$ fixé, lorsque $n \to \infty$ on a

$$\mathbf{P}(\lambda_\star > 2\sqrt{d-1} + \epsilon) \to 0.$$

- Conjecturé en 1986 par Noga Alon.
- Première démonstration (118 pages !) par Friedman en 2005.
- Deuxième démonstration par Bordenave en 2015.
- Conjecture (Novikoff 2002) : les fluctuations de $\lambda_\star$ autour de $2\sqrt{d-1}$ sont Tracy-Widom après renormalisation convenable.

Comment généraliser le théorème de Friedman ?

Peut-on calculer le trou spectral d'autres familles de graphes ?

- Si G est orienté, A n'est plus symétrique et ses valeurs propres sont beaucoup plus difficiles à étudier.
- λ_1 n'est pas connu sauf dans quelques cas particuliers.
- Idée : renormaliser la matrice d'adjacence et se ramener à $\lambda_1 = 1$, i.e. considérer la *matrice de transition*.

Rappels

Soit P une matrice de transition (irréductible, apériodique).
On note μ_i les valeurs propres de P, ordonnées par module :

$$1 = \mu_1 \geqslant |\mu_2| \geqslant ... \geqslant |\mu_n|.$$

théorème de convergence des CM

Soit P une matrice de transition (apériodique, récurrente positive) de loi invariante $\pi_\star$. Si on note $\Pi_\star$ la matrice dont chaque ligne est égale à $\pi_\star$, alors

$$\lim_{t \to \infty} ||P^t - \Pi_\star||^{\frac{1}{t}} = |\mu_2(P)|.$$

Exemple : graphes non orientés avec suite de degrés fixée.

Un modèle plus général de graphes sparse :

$\mathbf{d} = (d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+, \ldots)$ = suite d'entiers bornée.
$\mathscr{G}_{n,\mathbf{d}}$ = ensemble des graphes **orientés** à n sommets tels que

- le degré entrant de i est d_i^-
- le degré sortant de i est d_i^+

Remarque : pour que $\mathscr{G}_{n,\mathbf{d}} \neq \emptyset$, il faut que $\sum_{i=1}^n d_i^+ = \sum_{i=1}^n d_i^- := m$.

G = variable aléatoire distribuée uniformément sur $\mathscr{G}_{n,\mathbf{d}}$.
P matrice de transition de la marche aléatoire simple sur ce graphe
X = la chaîne de Markov associée à P
$\pi_\star$ la probabilité invariante (elle existe avec grande probabilité).

Théorème

On pose

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{t}\frac{d_i^-}{d_i^+}}$$

- [Bordenave, Caputo, Salez, 2015] *On note π_t la loi de X_t. On fixe t. Avec grande probabilité* $\limsup_n ||\pi_t - \pi_\star||_{VT} \leqslant O(\rho^t)$.
- [C., 2017]
  Pour tout $\epsilon > 0$, lorsque $n \to \infty$ on a (avec grande probabilité) :

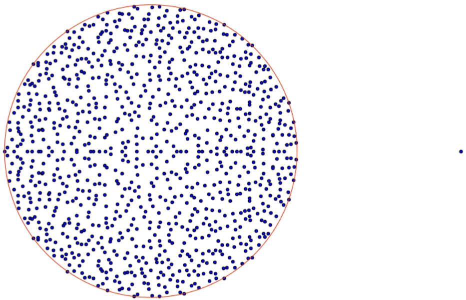
  $$|\mu_2| \leqslant \rho + \epsilon$$

Cas « orienté-régulier » où $d_i^+ = d_i^- = d$: dans ce cas, $P = A/d$. On a montré que $|\mu_2| \leqslant \sqrt{1/d} + \epsilon$ avec grande probabilité, donc

$$|\lambda_2| \leqslant \sqrt{d} + \epsilon$$

Simulation.

Spectre de la matrice de transition sur un graphe (aléatoire) avec 500 sommets de type $(4,5)$ et 500 sommets de type $(5,4)$:



En rouge, le cercle de rayon $\rho = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{t} \frac{d_i^-}{d_i^+}}$.