Chute de dimension pour les marches aléatoires sur les arbres aléatoires

Pierre Rousselin

LAGA
Université Paris 13 ; Labex MME-DII

Les probabilités de demain, 3 mai 2018

Les arbres et leurs bords

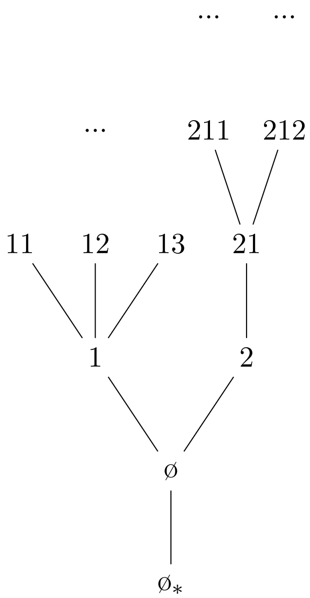
Arbres de Galton-Watson

Règles de flots

Mesure harmonique sur le bord d'un arbre

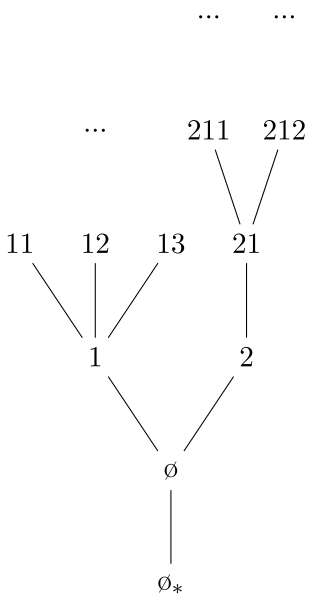
Marche aléatoire en milieu aléatoire

Arbres planaires : notation de Neveu



- Arbre t : partie de l'ensemble des mots finis sur $\mathbb{N}^*$;
- enraciné en $\varnothing$;
- parent artificiel de la racine $\varnothing_*$;
- hauteur dans l'arbre : $|212| = 3$.
- parent : $(212)_* = 21$;
- nombre d'enfants : $\nu_t(1) = 3$;
- t est infini, sans feuille et localement fini : $\nu_t(x) \in [1, \infty)$, pour tout x dans t.

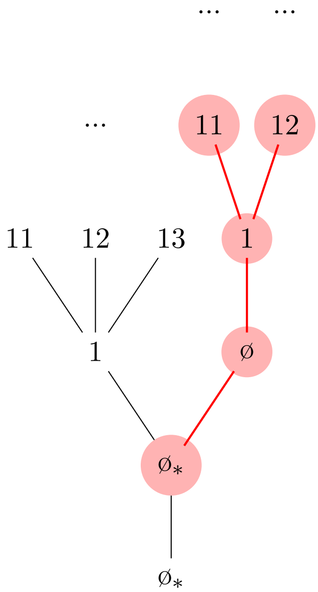
Sous-arbre réindexé



t un arbre et x dans t.

$$t[x] = \{y \in t : xy \in t\}\,.$$

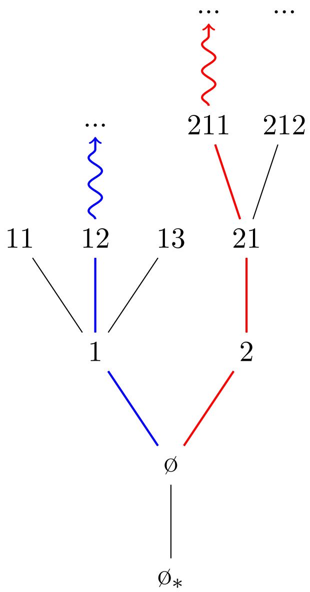
Sous-arbre réindexé



t un arbre et x dans t.

$$t[x] = \{y \in t : xy \in t\}\,.$$

Bord d'un arbre



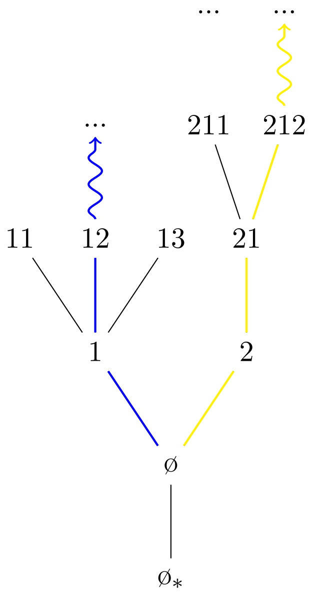
- Rayon ξ de l'arbre t : suite infinie de sommets

$$\xi = (\xi_0 = \varnothing, \xi_1, \xi_2, ...)$$

telle que pour tout i, ξ_{i+1} est un enfant de ξ_i.

- Bord ∂t de t : ensemble de ses rayons.
- $\xi \neq \eta \in \partial t \mapsto \xi \wedge \eta$: plus grand préfixe commun de ξ et η.
- $d(\xi, \eta) = \exp(-|\xi \wedge \eta|)$.
- Pour x dans t, le *cylindre* $[x]_t$ est l'ensemble des rayons de t qui passent par x.

Bord d'un arbre

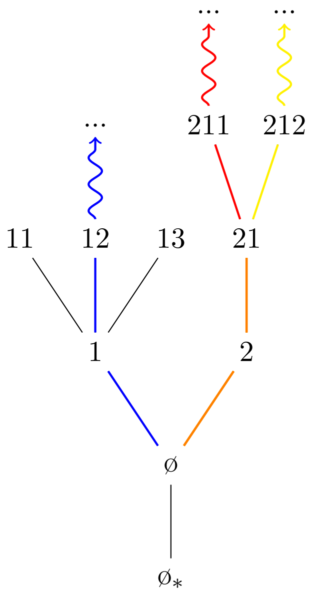


- Rayon ξ de l'arbre t : suite infinie de sommets

$$\xi = (\xi_0 = \emptyset, \xi_1, \xi_2, ...)$$

  telle que pour tout i, ξ_{i+1} est un enfant de ξ_i.
- Bord ∂t de t : ensemble de ses rayons.
- $\xi \neq \eta \in \partial t \mapsto \xi \wedge \eta$: plus grand préfixe commun de ξ et η.
- $d(\xi, \eta) = \exp(-|\xi \wedge \eta|)$.
- Pour x dans t, le *cylindre* $[x]_t$ est l'ensemble des rayons de t qui passent par x.

Bord d'un arbre



- Rayon ξ de l'arbre t : suite infinie de sommets

$$\xi = (\xi_0 = \varnothing, \xi_1, \xi_2, ...)$$

telle que pour tout i, ξ_{i+1} est un enfant de ξ_i.

- Bord ∂t de t : ensemble de ses rayons.
- $\xi \neq \eta \in \partial t \mapsto \xi \wedge \eta$: plus grand préfixe commun de ξ et η.
- $d(\xi, \eta) = \exp(-|\xi \wedge \eta|)$.
- Pour x dans t, le *cylindre* $[x]_t$ est l'ensemble des rayons de t qui passent par x.

Probabilités boréliennes sur le bord d'un arbre

À M, probabilité borélienne sur ∂t, on associe $\theta_M : t \to [0,1]$ définie par $\theta_M(x) \coloneqq M\left([x]_t\right)$. Alors, $\theta_M(\emptyset) = 1$ et pour tout x dans t,

$$\theta_M(x) = \theta_M(x1) + \theta_M(x2) + \cdots + \theta_M(x\nu_t(x)).$$

Probabilités boréliennes sur le bord d'un arbre

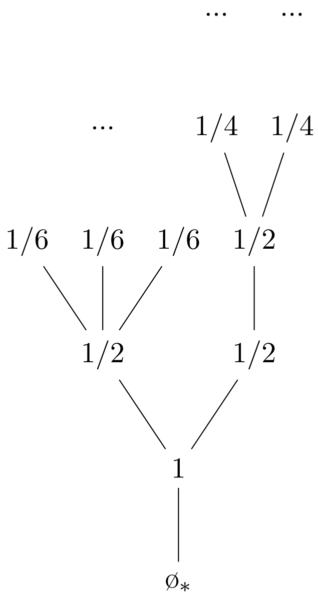
À M, probabilité borélienne sur ∂t, on associe $\theta_M : t \to [0, 1]$ définie par $\theta_M(x) := M\left([x]_t\right)$. Alors, $\theta_M(\varnothing) = 1$ et pour tout x dans t,

$$\theta_M(x) = \theta_M(x1) + \theta_M(x2) + \cdots + \theta_M(x\nu_t(x)).$$

Une telle fonction est appelée un *flot* (unitaire) sur l'arbre t.

$$\text{flots sur } t \longleftrightarrow \text{probabilités boréliennes sur } \partial t.$$

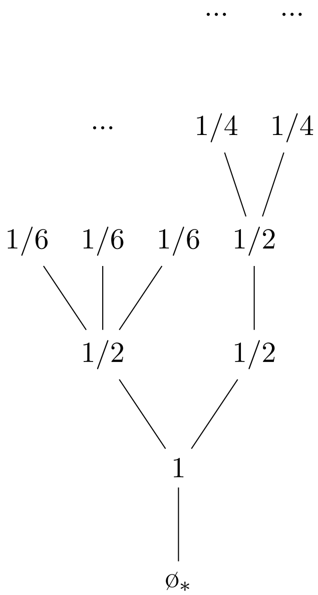
Un exemple : la mesure de visibilité



Définition récursive :

- $\mathsf{VIS}_t(\varnothing) = 1$
- pour tout sommet x et tout enfant y de x, $\mathsf{VIS}_t(y) = \mathsf{VIS}_t(x)/\nu_t(x)$.

Un exemple : la mesure de visibilité



Définition récursive :

- $\mathsf{VIS}_t(\varnothing) = 1$
- pour tout sommet x et tout enfant y de x, $\mathsf{VIS}_t(y) = \mathsf{VIS}_t(x)/\nu_t(x)$.

Point de vue probabiliste :
Loi d'un rayon aléatoire Ξ tel que pour tout $i \geq 0$, sachant le sommet Ξ_i, Ξ_{i+1} est choisi uniformément au hasard parmi les enfants de Ξ_i.

Chute de dimension : définition

- Dimension de Hausdorff d'une partie E de ∂t « $\approx$ taille de cette partie. »
- Si t est m-régulier, $\dim_{\mathrm{H}} \partial t = \log m$.
- Dimension d'un flot θ sur t :

$$\dim_{\mathrm{H}} \theta := \min \left\{ \dim_{\mathrm{H}} C : C \text{ borélien tel que } \theta(C) = 1 \right\}.$$

- On dit qu'il y a *chute de dimension* pour θ si $\dim_{\mathrm{H}} \theta < \dim_{\mathrm{H}} \partial t$.

Arbres de Galton-Watson

- Loi de reproduction $\mathbf{p}$ sur $\mathbb{N}$: suite $\mathbf{p} = (p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels positifs tels que $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ et
- d'espérance $m \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} kp_k < \infty$.

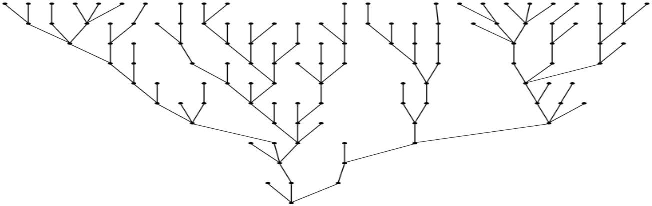


FIGURE – 10 générations d'une simulation d'un arbre de Galton-Watson. La loi de reproduction est uniforme sur $\{0; 1; 2; 3\}$.

Arbres de Galton-Watson

- Loi de reproduction $\mathbf{p}$ sur $\mathbb{N}$: suite $\mathbf{p} = (p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels positifs tels que $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ et
- d'espérance $m := \sum_{k=1}^{\infty} kp_k < \infty$.

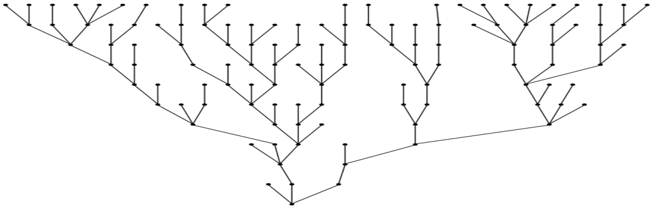


FIGURE – 10 générations d'une simulation d'un arbre de Galton-Watson. La loi de reproduction est uniforme sur $\{0; 1; 2; 3\}$.

On suppose $p_0 = 0$ et $p_1 < 1$.

Presque sûrement, $\dim_{\mathrm{H}} \partial T = \log m$ (Lyons, 1990).

Flot limite uniforme

$Z_n(t)$: nombre d'individus à la génération n dans l'arbre t.
On suppose que $\sum_{k\geq 1} p_k k \log k < \infty$. Alors (Kesten, Stigum),

$$\lim_{n\to\infty} Z_n(T)/m^n = W(T) \in (0,\infty)\,\text{p.s.}$$

Équation récursive :

$$W(T) = \frac{1}{m}\sum_{|i|=1} W(T[i])$$

Flot UNIF_T : pour tout $1 \leq i \leq \nu_T(\varnothing)$,

$$\mathsf{UNIF}_T(i) = \frac{W(T[i])}{\sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} W(T[j])}.$$

Règle de flot : définition

Une règle (cohérente) de flots Θ est une fonction

$$\Theta : \text{arbre} \mapsto \text{flot sur cet arbre}$$

telle que :

- pour tout arbre t, Θ_t est un flot sur t ;
- pour tout sommet x dans t, $\Theta_t(x) > 0$;
- Si Ξ est un rayon aléatoire sur t, de loi Θ_t et $x \in t$, la loi du rayon Ξ sachant $\{x \prec \Xi\}$ est la loi de $x\Xi'$, où Ξ' a pour loi $\Theta_{t[x]}$.

Exemples : VIS, UNIF sont des règles de flot.

Mesure invariante par rapport à une règle de flot

Soit μ une mesure de probabilité sur l'ensemble des arbres et Θ une règle de flot.

1. On commence par tirer T aléatoire suivant μ ;
2. puis, pour $1 \leq i \leq \nu_T(\varnothing)$, on choisi le sous-arbre $T[i]$ avec probabilité $\Theta_t(i)$.

Définition

Si la loi de l'arbre aléatoire obtenu est encore μ, on dit que μ est Θ-invariante.

Mesure invariante absolument continue par rapport à **GW**

Théorème (Lyons, Pemantle, Peres, 1995)

S'il existe une probabilité μ_Θ qui est

- *absolument continue par rapport à* **GW**,
- Θ*-invariante,*

alors, pour **GW***-presque tout* t,

$$\dim \Theta_t = \mathbb{E}\left[-\log(\Theta_T(\Xi_1)) \frac{\mathrm{d}\mu_\Theta}{\mathrm{d}\mathbf{GW}}(T) \right].$$

Exemples de calculs de dimension

- Pour VIS, la mesure $\mathbf{GW}$ est déjà stationnaire. La formule donne, presque sûrement,

$$\dim \mathsf{VIS}_T = \mathbb{E}[\log \nu_T(\varnothing)] \underbrace{<}_{\text{Jensen}} \log m.$$

- Pour UNIF, la mesure de densité W par rapport à $\mathbf{GW}$ est invariante.

$$\dim \mathsf{UNIF}_T = \log m, \quad \text{p.s.}$$

Exemples de calculs de dimension

- Pour VIS, la mesure $\mathbf{GW}$ est déjà stationnaire. La formule donne, presque sûrement,

$$\dim \mathsf{VIS}_T = \mathbb{E}[\log \nu_T(\varnothing)] \underbrace{<}_{\text{Jensen}} \log m.$$

- Pour UNIF, la mesure de densité W par rapport à $\mathbf{GW}$ est invariante.

$$\dim \mathsf{UNIF}_T = \log m, \quad \text{p.s.}$$

Théorème (Lyons, Pemantle, Peres, 1995)

Sous les hypothèses du théorème précédent, pour $\mathbf{GW}$*-presque tout* t*,* $\dim \Theta_t < \log m$*, sauf si* Θ_t *est presque sûrement égal à* UNIF_t*.*

Les arbres et leurs bords

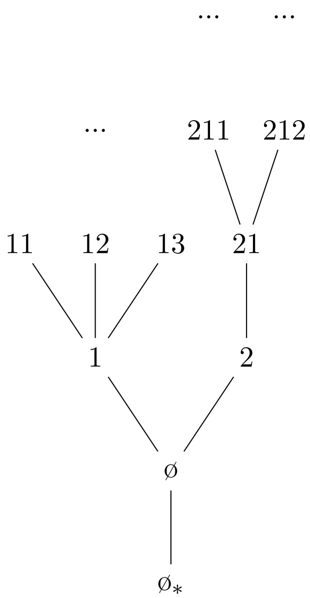
Arbres de Galton-Watson

Règles de flots

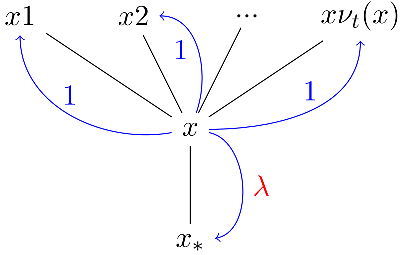
Mesure harmonique sur le bord d'un arbre

Marche aléatoire en milieu aléatoire

Marche aléatoire λ-biaisée sur un arbre



Soit $\lambda > 0$.



Exemple :

$$P^t_{\varnothing}(X_1 = 1,\ X_2 = \varnothing,\ X_3 = 2)$$
$$= \frac{1}{\lambda + 2} \times \frac{\lambda}{\lambda + 3} \times \frac{1}{\lambda + 2}.$$

Conductance

- Conductance de l'arbre t : $\beta(t) = P^t_{\varnothing}(\tau_{\varnothing_*} = \infty)$.
- $\beta(t) > 0$ ssi la marche aléatoire est transiente.
- Pour la marche λ-biaisée,

$$\beta(t) = \frac{\sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \beta(t[j])}{\lambda + \sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \beta(t[j])}.$$

Cas d'un arbre de Galton-Watson

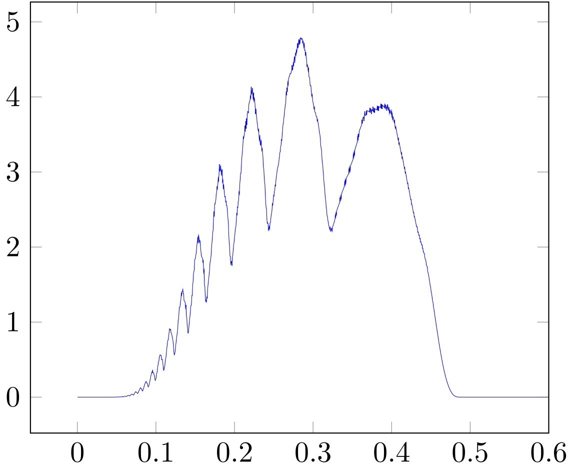
Théorème (Lyons, 1990)

La marche aléatoire λ-biaisée est presque sûrement transiente si $0 < \lambda < m$ et est presque sûrement récurrente sinon.

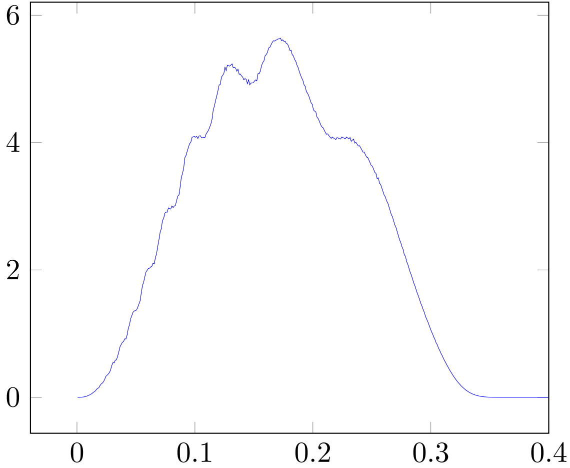
Équation distributionnelle récursive :

$$\beta(T) = \frac{\sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \beta(T[j])}{\lambda + \sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \beta(T[j])}$$

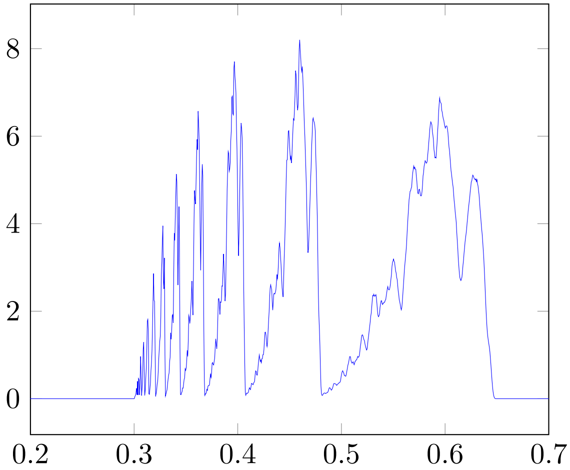
Densité apparente de β pour $\lambda = 1$ et $p_1 = p_2 = 1/2$



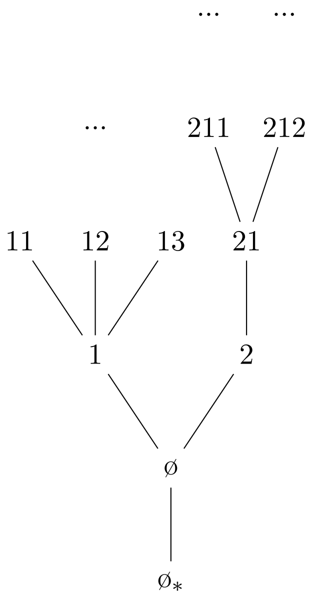
Densité apparente de β pour $\lambda = 1, 2$ et $p_1 = p_2 = 1/2$



Densité apparente de β pour $\lambda = 0,7$ et $p_1 = p_2 = 1/2$



Temps de sortie

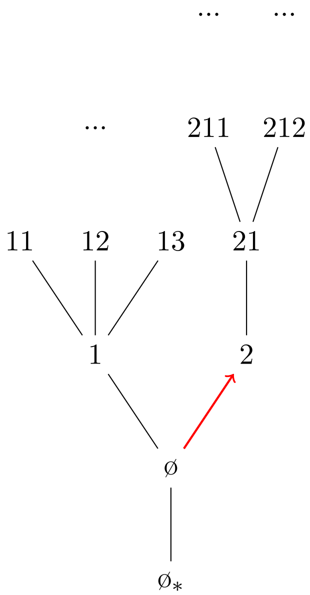


Pour une marche transiente.
Soit $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots)$ une trajectoire de marche aléatoire issue de la racine ø dans t.
L'ensemble des temps de sortie associés à $\mathbf{X}$ est

$$\mathsf{et}\,(\mathbf{X}) := \{s \geq 0 : \forall k > s,\ X_k \neq (X_s)_*\}\,.$$

On les numérote
$\mathsf{et}_0\,(\mathbf{X}) < \mathsf{et}_1\,(\mathbf{X}) < \cdots$.

Temps de sortie

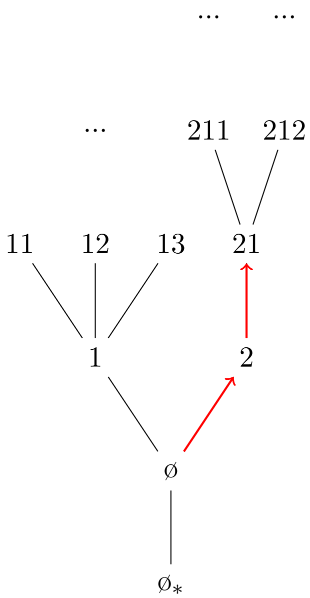


Pour une marche transiente.
Soit $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots)$ une trajectoire de marche aléatoire issue de la racine ø dans t.
L'ensemble des temps de sortie associés à $\mathbf{X}$ est

$$\mathsf{et}\,(\mathbf{X}) \coloneqq \{s \geq 0 : \forall k > s,\ X_k \neq (X_s)_*\}\,.$$

On les numérote
$\mathsf{et}_0\,(\mathbf{X}) < \mathsf{et}_1\,(\mathbf{X}) < \cdots$.
Les points de sortie sont
$\mathsf{ep}_0\,(\mathbf{X}) = X_{\mathsf{et}_0(\mathbf{X})} = ø$,
$\mathsf{ep}_1\,(\mathbf{X}) = X_{\mathsf{et}_1(\mathbf{X})}$, ...

Temps de sortie

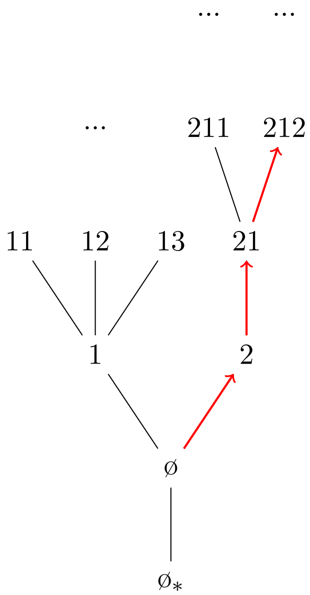


Pour une marche transiente.
Soit $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots)$ une trajectoire de marche aléatoire issue de la racine $\varnothing$ dans t.
L'ensemble des temps de sortie associés à $\mathbf{X}$ est

$$\mathsf{et}\,(\mathbf{X}) \coloneqq \{s \geq 0 : \forall k > s,\, X_k \neq (X_s)_*\}\,.$$

On les numérote
$\mathsf{et}_0\,(\mathbf{X}) < \mathsf{et}_1\,(\mathbf{X}) < \cdots$.
Les points de sortie sont
$\mathsf{ep}_0\,(\mathbf{X}) = X_{\mathsf{et}_0(\mathbf{X})} = \varnothing$,
$\mathsf{ep}_1\,(\mathbf{X}) = X_{\mathsf{et}_1(\mathbf{X})}$, ...

Temps de sortie

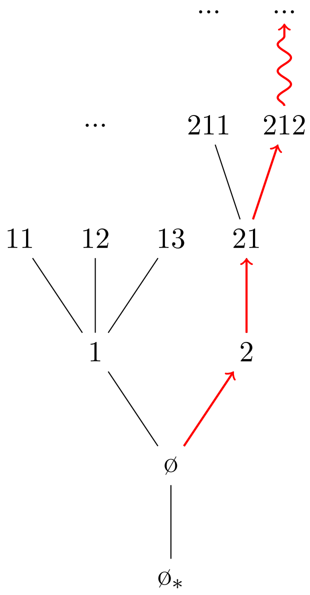


Pour une marche transiente.
Soit $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots)$ une trajectoire de marche aléatoire issue de la racine ø dans t.
L'ensemble des temps de sortie associés à $\mathbf{X}$ est

$$\mathsf{et}(\mathbf{X}) \coloneqq \{s \geq 0 : \forall k > s,\ X_k \neq (X_s)_*\}.$$

On les numérote $\mathsf{et}_0(\mathbf{X}) < \mathsf{et}_1(\mathbf{X}) < \cdots$.
Les points de sortie sont
$\mathsf{ep}_0(\mathbf{X}) = X_{\mathsf{et}_0(\mathbf{X})} = ø$,
$\mathsf{ep}_1(\mathbf{X}) = X_{\mathsf{et}_1(\mathbf{X})}$, ...

Temps de sortie



Pour une marche transiente.
Soit $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots)$ une trajectoire de marche aléatoire issue de la racine ø dans t.
L'ensemble des temps de sortie associés à $\mathbf{X}$ est

$$\mathsf{et}\,(\mathbf{X}) \coloneqq \{s \geq 0 : \forall k > s,\ X_k \neq (X_s)_*\}\,.$$

On les numérote $\mathsf{et}_0\,(\mathbf{X}) < \mathsf{et}_1\,(\mathbf{X}) < \cdots$.
Les points de sortie sont
$\mathsf{ep}_0\,(\mathbf{X}) = X_{\mathsf{et}_0(\mathbf{X})} = ø$,
$\mathsf{ep}_1\,(\mathbf{X}) = X_{\mathsf{et}_1(\mathbf{X})}$, ...

Rayon associé à la marche et mesure harmonique

On note

$$\Xi := \mathrm{ray}\left(\mathbf{X}\right) := \left(\mathsf{ep}_0\left(\mathbf{X}\right), \mathsf{ep}_1\left(\mathbf{X}\right), \ldots\right).$$

Ξ est un rayon aléatoire.
Sa loi est appelée la *mesure harmonique* sur ∂t.
On la note HARM_t.

Rayon associé à la marche et mesure harmonique

On note

$$\Xi := \mathrm{ray}\,(\mathbf{X}) := (\mathsf{ep}_0\,(\mathbf{X})\,,\mathsf{ep}_1\,(\mathbf{X})\,,\dots)\,.$$

Ξ est un rayon aléatoire.
Sa loi est appelée la *mesure harmonique* sur ∂t.
On la note HARM_t.
Pour tout $x \in t$,

$$\begin{aligned}\mathsf{HARM}_t(x) &= P^t_{\varnothing}(x \prec \Xi)\\ &= P^t_{\varnothing}\left(\exists s \geq 0,\ X_s = x \text{ et } \forall k > s,\ X_k \neq x_*\right).\end{aligned}$$

Rayon associé à la marche et mesure harmonique

On note

$$\Xi := \mathrm{ray}\,(\mathbf{X}) := \left(\mathsf{ep}_0\,(\mathbf{X})\,,\mathsf{ep}_1\,(\mathbf{X})\,,\ldots\right).$$

Ξ est un rayon aléatoire.
Sa loi est appelée la *mesure harmonique* sur ∂t.
On la note HARM_t.
Pour tout $x \in t$,

$$\begin{aligned}\mathsf{HARM}_t(x) &= P^t_\varnothing(x \prec \Xi)\\ &= P^t_\varnothing\left(\exists s \geq 0,\ X_s = x \text{ et } \forall k > s,\ X_k \neq x_*\right).\end{aligned}$$

Pour la marche λ-biaisée,

$$\forall 1 \leq i \leq \nu_t(\varnothing), \quad \mathsf{HARM}_t(i) = \frac{\beta(t[i])}{\sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \beta(t[j])}.$$

Dimension de la mesure harmonique

Théorème (Lyons, Pemantle, Peres, 1995, $\lambda = 1$)

$$\dim \mathsf{HARM}_t = C_1^{-1}\mathbb{E}\left[(-\ln)\,(1-\beta(T))\,\frac{\beta(T)\sum_{i=1}^{\widetilde{\nu}}\beta(\widetilde{T}[i])}{\beta(T)+\sum_{i=1}^{\widetilde{\nu}}\beta(\widetilde{T}[i])}\right]$$

$$< \log(m) = \dim_{\mathrm{H}} \partial t \quad \textit{pour } \mathbf{GW}\textit{-presque tout } t.$$

Dimension de la mesure harmonique

Théorème (Lyons, Pemantle, Peres, 1995, $\lambda = 1$)

$$\dim \mathsf{HARM}_t = C_1^{-1}\mathbb{E}\left[(-\ln)\,(1-\beta(T))\,\frac{\beta(T)\sum_{i=1}^{\widetilde{\nu}}\beta(\widetilde{T}[i])}{\beta(T)+\sum_{i=1}^{\widetilde{\nu}}\beta(\widetilde{T}[i])}\right]$$
$$< \log(m) = \dim_{\mathrm{H}} \partial t \quad \textit{pour } \mathbf{GW}\textit{-presque tout } t.$$

Théorème (Lyons, Pemantle, Peres, 1996, $0 < \lambda < m$)

Il existe $d_\lambda \in (0, \ln m)$*, telle que pour* $\mathbf{GW}$*-presque tout* t*,* $\dim \mathsf{HARM}_t = d_\lambda$.

Dimension de la mesure harmonique, cas λ-biaisé

Théorème (Lin 2017, R. 2017)

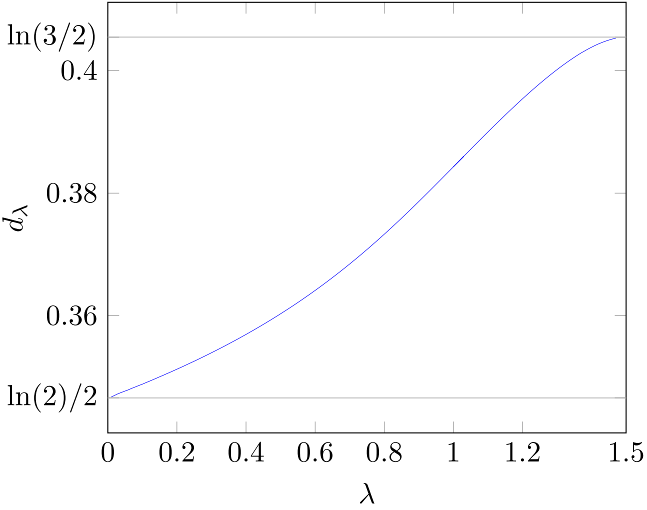
Soit, pour $u > \max(0, 1-\lambda)$,

$$\kappa(u) = \mathbb{E}\left[\frac{u\sum_{i=1}^{\widetilde{\nu}} \beta(\widetilde{T}[i])}{\lambda - 1 + u + \sum_{i=1}^{\widetilde{\nu}} \beta(\widetilde{T}[i])}\right].$$

La mesure de densité $\kappa(\beta(t))$ *par rapport à* $\mathbf{GW}$ *est* HARM-*invariante. La dimension de* HARM_T *vaut p.s.*

$$d_\lambda = \ln(\lambda) + C_\lambda^{-1}\mathbb{E}\left[(-\ln)(1-\beta(T))\frac{\lambda\beta(T)\sum_{i=1}^{\widetilde{\nu}} \beta(\widetilde{T}[i])}{\lambda - 1 + \beta(T) + \sum_{i=1}^{\widetilde{\nu}} \beta(\widetilde{T}[i])}\right].$$

Calculs numériques de d_λ pour $p_1 = p_2 = 1/2$



Les arbres et leurs bords

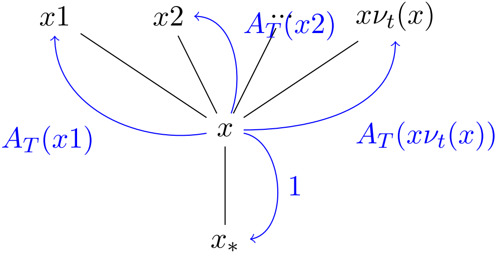
Arbres de Galton-Watson

Règles de flots

Mesure harmonique sur le bord d'un arbre

Marche aléatoire en milieu aléatoire

Définition du modèle



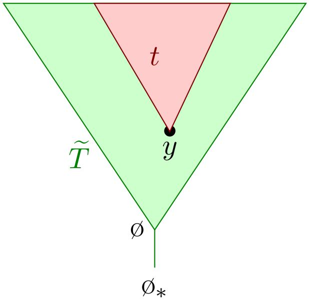
- T arbre de Galton-Watson et une famille i.i.d. $(A_T(x))_{x\in T}$ de réels strictement positifs.
- Arbre pondéré aléatoire (T, A_T).
- Si $\min_{\alpha\in[0,1]} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\nu_T(\varnothing)} A_T(i)^\alpha\right] > 1$ alors la marche aléatoire est presque sûrement transiente.

Temps et points de régénération

$n \geq 0$ temps de régénération si

$$\forall k < n,\, X_k \neq X_n \quad \text{et} \quad \forall k > n,\, X_k \neq (X_n)_*.$$

- Presque sûrement une infinité de temps de régénération (Lyon, Pemantle, Peres 1996, Aïdékon, 2008) ;
- sur l'événement $\{\tau_{\varnothing_*} = \infty\}$, $0 = \mathsf{rt}_0 < \mathsf{rt}_1 < \cdots$ est un processus de renouvellement.
- Les sommets $\mathsf{rp}_k = X_{\mathsf{rt}_k}$ associés sont des sommets particuliers du rayon harmonique.
- La loi de $\left\{T[\mathsf{rp}_k], (X_{\mathsf{rt}_k+i})_{i\geq 0}\right\}_{k\geq 0}$ sous $\mathbb{P}\left(\cdot|\tau_{\varnothing_*} = \infty\right)$ est stationnaire.
- Pour avoir une mesure stationnaire par rapport aux *temps de sortie*, on construit une tour de Rokhlin.



Théorème (R. 2017)

La mesure de densité

$$\kappa(t) = \mathbb{E}\Big[\sum_{y \in \widetilde{T}} P_{\varnothing}^{\widetilde{T}^{\leq y} \triangleleft t}(\mathsf{rp}_1 \succ y,\, \tau_{\varnothing_*} = \infty)\Big]$$

par rapport à la loi de l'arbre pondéré est HARM*-invariante. La dimension de* HARM *est strictement inférieure à* $\log m$*, sauf si le milieu est totalement déterministe (marche* λ*-biaisée sur un arbre régulier).*

Merci pour votre attention !