Inégalités isopérimétriques dans la quadrangulation uniforme infinie du plan

Thomas Lehéricy

LMO, Université Paris-Sud

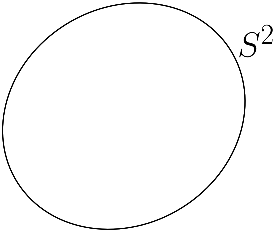
May 3, 2018

Section 1

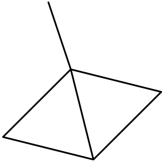
Qu'est-ce qu'une carte planaire ?

Définition

Une carte planaire est un graphe planaire connexe localement fini plongé dans une surface, vu à homéomorphisme conservant l'orientation près.

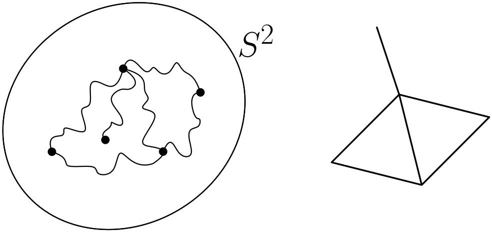


$+$



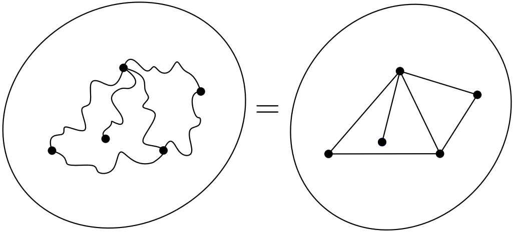
Définition

Une carte planaire est un graphe planaire connexe localement fini plongé dans une surface, vu à homéomorphisme conservant l'orientation près.



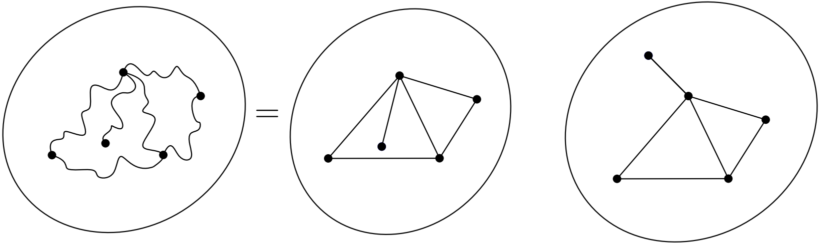
Définition

Une carte planaire est un graphe planaire connexe localement fini plongé dans une surface, vu à homéomorphisme conservant l'orientation près.



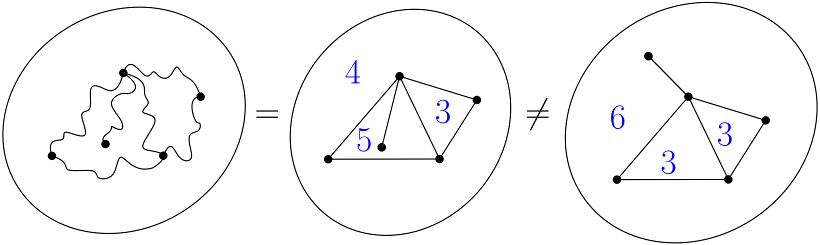
Définition

Une carte planaire est un graphe planaire connexe localement fini plongé dans une surface, vu à homéomorphisme conservant l'orientation près.



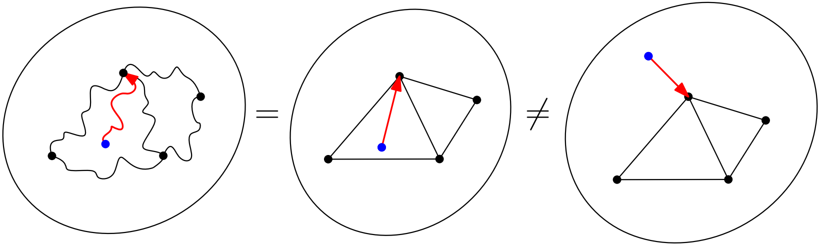
Définition

Une carte planaire est un graphe planaire connexe localement fini plongé dans une surface, vu à homéomorphisme conservant l'orientation près.



Définition

Une carte planaire est un graphe planaire connexe localement fini plongé dans une surface, vu à homéomorphisme conservant l'orientation près.



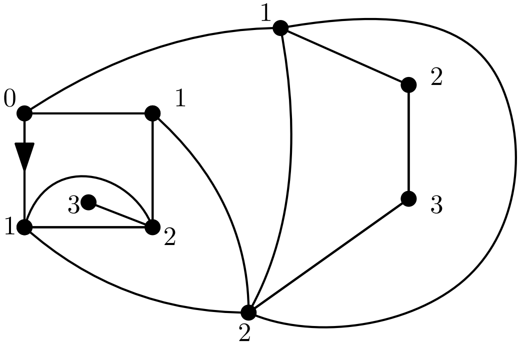
Arête racine : arête orientée distinguée
Sommet racine : origine de l'arête racine

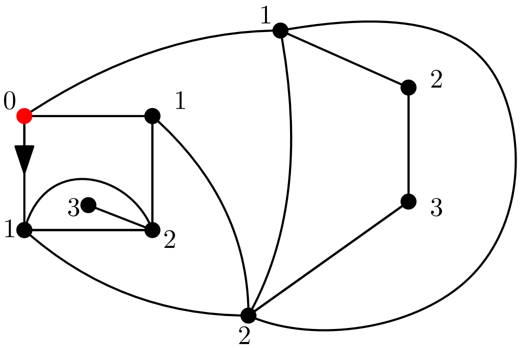
On voit une carte m comme un *espace métrique mesuré :*

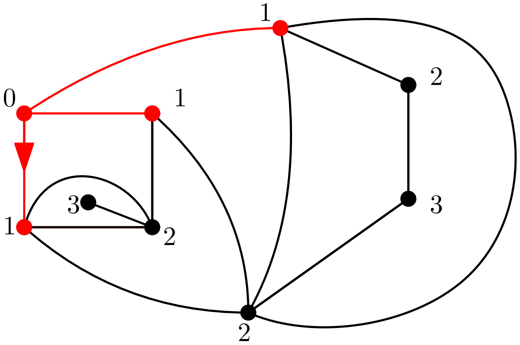
$$(V(m), \mathrm{d}_{\mathrm{gr}}, \mu)$$

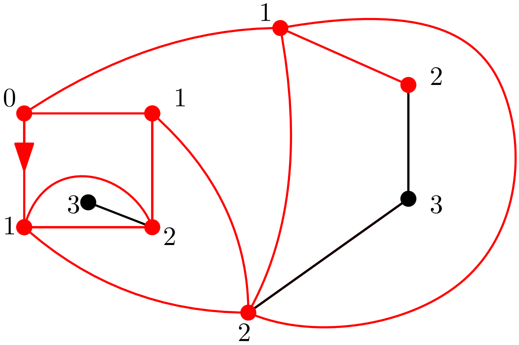
- $V(m)$ sommets de m,
- d_{gr} distance de graphe sur $V(m)$,
- μ mesure de comptage : $\forall \mathcal{V} \subset V(m), \mu(\mathcal{V}) = \mathrm{Card}(\mathcal{V}) =: |\mathcal{V}|$.

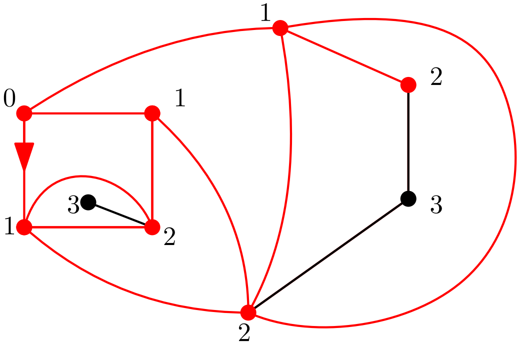
$\mu(m) = |V(m)|$ est la *taille* de m.


1
0
1
2
3
1
2
3
2
2


1
2
0
1
3
3
1
2
2


1
0
1
2
3
1
2
3
2


1
0
1
2
3
1
2
3
2



Définition

- *Une quadrangulation est une carte planaire enracinée dont toutes les faces ont degré 4.*
- $\mathbb{Q}_n$ *l'ensemble des quadrangulations de taille n.*
- $Q_n \sim Unif(\mathbb{Q}_n)$.

Limite d'échelle : la carte brownienne

$$\Big(V(Q_n), \qquad d_{\mathrm{gr}}, \qquad \mu\Big)$$

Limite d'échelle : la carte brownienne

$$\Big(V(Q_n), \qquad \mathsf{d}_{\mathsf{gr}}, n^{-1}\mu\Big)$$

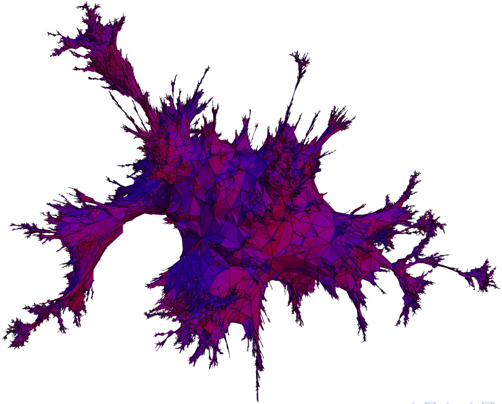
Limite d'échelle : la carte brownienne

$$\left(V(Q_n), n^{-1/4}\mathrm{d}_{\mathrm{gr}}, n^{-1}\mu\right)$$

Limite d'échelle : la carte brownienne

$$\left(V(Q_n), n^{-1/4}\mathrm{d}_{\mathrm{gr}}, n^{-1}\mu\right) \xrightarrow{G-H-P} (\mathbf{m}_\infty, D^*, \lambda)$$

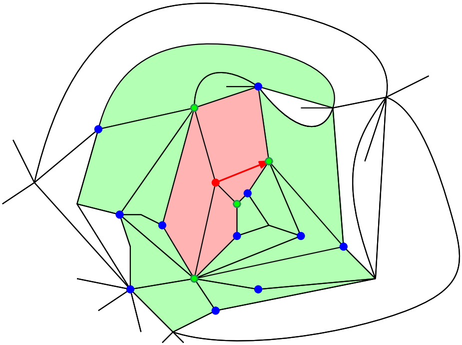
$(\mathbf{m}_\infty, D^*, \lambda)$ est la carte brownienne.



Limite locale : l'UIPQ

Définition (Boule de rayon r de m $B_r(m)$)

La sous-carte de m obtenue en conservant les faces dont un sommet est à distance strictement inférieure à r du sommet racine, et les arêtes et sommets incidents à ces faces.



Limite locale : l'UIPQ

$$d_{\mathrm{loc}}(m, m') = \frac{1}{1 + \sup\{r \geq 0 : B_r(m) = B_r(m')\}}$$

Métrise la topologie de la convergence locale.

Proposition (et définition)

$$Q_n \xrightarrow{(d)} Q_\infty$$

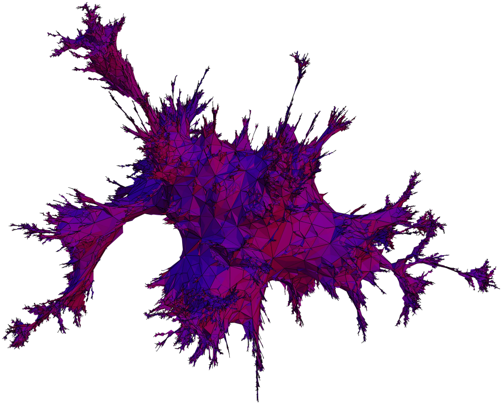
pour la topologie de la convergence locale. Q_∞ est la quadrangulation uniforme infinie du plan (UIPQ).

Q_∞ ressemble à une grande quadrangulation vue d'un "point typique".

Section 2

Isopérimétrie

A quoi ressemblent les grands ensembles de petits périmètres ?



Dans l'UIPQ, Q_n, la carte brownienne...

Analogie (Cas de $\mathbb{Z}^d$)

Les boules minimisent le périmètre à volume donné.

$$|B_r| \asymp r^d$$
$$|\partial B_r| \asymp r^{d-1}$$
$$|\partial B_r| \asymp |B_r|^{\frac{d-1}{d}}$$

Analogie (Cas de $\mathbb{Z}^d$)

Les boules minimisent le périmètre à volume donné.

$$|B_r| \asymp r^d$$
$$|\partial B_r| \asymp r^{d-1}$$
$$|\partial B_r| \asymp |B_r|^{\frac{d-1}{d}}$$

$\mathcal{S}$ un ensemble de sous-cartes.

Définition (Dimension isopérimétrique)

$\mathcal{S}$ *a dimension isopérimétrique* $d =: dim_{isop}(\mathcal{S})$ *si pour tout* $\epsilon > 0$,

$$\inf_{S \in \mathcal{S}} \frac{|\partial S|}{|S|^{\frac{d-1}{d} - \epsilon}} > 0 \ a.s. \qquad \inf_{S \in \mathcal{S}} \frac{|\partial S|}{|S|^{\frac{d-1}{d} + \epsilon}} = 0 \ a.s.$$

Notre cadre

$\mathcal{S}$: sous-cartes finies de Q_∞ qui contiennent le sommet racine.

Notre cadre

$\mathcal{S}$: sous-cartes finies de Q_∞ qui contiennent le sommet racine.

Conjecture (Angel, 2002, UIPT case)

$$dim_{isop}(\mathcal{S}) = 2.$$

Notre cadre

$\mathcal{S}$: sous-cartes finies de Q_∞ qui contiennent le sommet racine.

Conjecture (Angel, 2002, UIPT case)

$$dim_{isop}(\mathcal{S}) = 2.$$

$$|B_r| \asymp r^4$$
$$|\partial B_r| \asymp r^2$$
$$|\partial B_r| \asymp |B_r|^{\frac{2-1}{2}}$$

Notre cadre

$\mathcal{S}$: sous-cartes finies de Q_∞ qui contiennent le sommet racine.

Conjecture (Angel, 2002, UIPT case)

$$dim_{isop}(\mathcal{S}) = 2.$$

$$|B_r| \asymp r^4 \qquad |S| \supset B_r$$

$$|\partial B_r| \asymp r^2 \qquad |\partial S| \asymp r$$

$$|\partial B_r| \asymp |B_r|^{\frac{2-1}{2}} \qquad |\partial S| \lesssim |S|^{\frac{4/3-1}{4/3}}$$

Notre cadre

$\mathcal{S}$: sous-cartes finies de Q_∞ qui contiennent le sommet racine.

Conjecture (Angel, 2002, UIPT case)

$$dim_{isop}(\mathcal{S}) = 2.$$

$$
\begin{array}{ll}
|B_r| \asymp r^4 & |S| \supset B_r \\
|\partial B_r| \asymp r^2 & |\partial S| \asymp r \\
|\partial B_r| \asymp |B_r|^{\frac{2-1}{2}} & |\partial S| \lesssim |S|^{\frac{4/3-1}{4/3}}
\end{array}
$$

Proposition (Krikun, 2009)

$$dim_{isop}(\mathcal{S}) \leq \frac{4}{3}.$$

Notre cadre

$\mathcal{S}$: sous-cartes finies de Q_∞ qui contiennent le sommet racine.

Conjecture (Angel, 2002, UIPT case)

$$dim_{isop}(\mathcal{S}) = 2.$$

$$|B_r| \asymp r^4 \qquad |S| \supset B_r$$

$$|\partial B_r| \asymp r^2 \qquad |\partial S| \asymp r$$

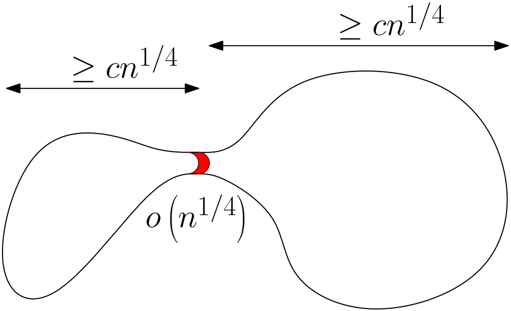
$$|\partial B_r| \asymp |B_r|^{\frac{2-1}{2}} \qquad |\partial S| \lesssim |S|^{\frac{4/3-1}{4/3}}$$

Conjecture (Krikun, 2009)

$$dim_{isop}(\mathcal{S}) = \frac{4}{3}.$$

Vers une borne inférieure

Curien, Le Gall, 2007 : version faible établie pour une classe $\mathcal{S}$ plus restreinte.
Preuve via la carte brownienne.



$\mathcal{S}$: sous-cartes finies de Q_∞ qui contiennent le sommet racine.

Théorème (Le Gall, Lehéricy, 2017)

Pour tout $\delta > 0$,

$$\inf_{S \in \mathcal{S}} \frac{|\partial S|}{|S|^{\frac{1}{4}} (\ln |S|)^{-\frac{3}{4} - \delta}} > 0.$$

En particulier,

$$dim_{isop}(\mathcal{S}) = \frac{4}{3}.$$

- "Optimal" : l'exposant $\frac{3}{4}$ peut sans doute être amélioré, mais on ne peut pas le supprimer
- Contrôle précis des ensembles qui réalisent l'infimum
- Généralisation possible à d'autres modèles discrets ou continus

Merci de votre attention !